Curso Básico de Lógica Matemática

Renata de Freitas
Petrucio Viana

Versão preliminar

Conteúdo

1 Lógica Sentencial **7**

1.1 Motivação . . . 7

1.1.1 Um Exemplo . . . 7

1.1.2 Verdades Lógicas . . . 8

1.2 Sintaxe . . . 9

1.2.1 Formação de Sentenças . . . 9

1.2.2 Reescrita de Sentenças . . . 17

1.2.3 Simbolização de Sentenças . . . 22

1.3 Semântica . . . 26

1.3.1 Função de Verdade . . . 26

1.3.2 Regras de avaliação e tabelas de verdade dos conectivos . . . 29

1.3.3 Interpretações . . . 36

1.4 Tautologias, Contingências e Contradições . . . 41

1.5 Equivalência Tautológica . . . 43

1.6 Validade . . . 45

1.6.1 Passos Lógicos . . . 45

1.6.2 Validade de Argumentos . . . 46

1.6.3 O Método das Tabelas de Verdade . . . 48

2 Lógica Monádica **57**

2.1 O Cálculo Sentencial . . . 57

2.1.1 O CS . . . 57

2.1.2 Insuficiência do CS . . . 60

2.2 Quantificação . . . 64

2.2.1 Quantificação em Domínios Finitos . . . 64

2.2.2 Quantificação em Domínios Infinitos . . . 67

2.3 Sintaxe . . . 69

2.3.1 Formas Sentenciais . . . 69

2.3.2 Constantes e Variáveis . . . 71

2.3.3 Forma dos Enunciados Atômicos . . . 73

2.3.4 Propriedades e Símbolos de Predicado . . . 74

2.3.5 Reescrita de Símbolos de Predicado . . . 75

2.3.6 Termos . . . 77

2.3.7 Reescrita e Simbolização de Termos . . . 78

2.3.8 Simbolização de Enunciados . . . 79

3 Árvores de Refutação **83**
3.1 Ineficiência das tabelas de verdade . . . 83
3.2 O método de redução ao absurdo . . . 84
3.3 O método de refutação . . . 85
3.4 Árvores de refutação . . . 86
3.5 Regras de refutação do CS . . . 87
3.6 Regras de refutação do CM . . . 92

4 Lógica Quantificacional **97**
4.1 O Cálculo Monádico, CM . . . 97
4.1.1 Forma dos Enunciados Atômicos . . . 104
4.1.2 Propriedades, Relações e Símbolos de Predicado . . . 106
4.1.3 Reescrita de Símbolos de Predicado . . . 108
4.1.4 Simbolização de Enunciados . . . 110

5 Sistema Dedutivo **113**
5.1 Regra T . . . 113
5.1.1 Mais algumas limitações . . . 113
5.1.2 A Regra T . . . 114
5.1.3 Utilizando a Regra T . . . 117
5.2 Método de Análise e Síntese . . . 119
5.2.1 Análise e Síntese . . . 119
5.2.2 Eliminação do $\rightarrow$ . . . 123
5.2.3 Introdução do $\rightarrow$ . . . 125
5.2.4 Eliminação do $\wedge$ . . . 128
5.2.5 Introdução do $\wedge$ . . . 130
5.2.6 Introdução do $\vee$ . . . 131
5.2.7 Eliminação do $\vee$ . . . 132
5.2.8 Eliminação do $\neg$ . . . 136
5.2.9 Introdução do $\neg$ . . . 138
5.2.10 Eliminação do $\leftrightarrow$ . . . 142
5.2.11 Introdução do $\leftrightarrow$ . . . 144
5.2.12 Eliminação do $\forall$ . . . 147
5.2.13 Introdução do $\forall$ . . . 154
5.2.14 Introdução do $\exists$ . . . 160
5.2.15 Eliminação do $\exists$ . . . 161

Prefácio

Este texto foi escrito para ser usado como material de apoio nas disciplinas de *Lógica Matemática*, oferecidas para os alunos dos primeiros períodos dos cursos de nível superior.

Por ser um texto *introdutório* para alunos saídos a pouco tempo do segundo grau, possui algumas peculiaridades. Em particular, para sua leitura não é necessário quase nenhum pré-requisito matemático e nenhuma compreensão do que seja a atividade lógica. Tudo o que é necessário é dado no texto.

Estas peculiaridades são o resultado da análise, por parte dos autores, da seguinte questão: a lógica matemática pode tanto ser considerada como o estudo do ferramental lógico utilizado pelos matemáticos, quanto como o estudo da lógica, utilizando o ferramental matemático.

Tanto em uma abordagem como na outra, é evidente que se deve ter algum conhecimento do que seja a atividade matemática e do tipo de questões de que trata a lógica, pois não se pode estudar a lógica utilizada pelos matemáticos se não se conhece a lógica que os matemáticos utilizam. E não se pode estudar a lógica utilizando ferramentas matemáticas se não se conhece as ferramentas que os matemáticos utilizam. Assim, não se pode estudar devidamente a lógica matemática se não se conhece um mínimo de matemática.

Por outro lado, é uma crença geral — mas não universal — que se deve conhecer um mínimo de lógica para que se possa aprender matemática.

Podemos dizer, então, que o presente texto foi escrito sob a luz do seguinte paradoxo:

> *Conhecer a matemática para estudar a lógica e ao mesmo tempo, conhecer a lógica para estudar a matemática.*

Este texto é uma tentativa de solução para o paradoxo acima. Por isso, procuramos motivar a introdução de *todos* os conceitos lógicos apresentados, a partir de algumas análises iniciais da atividade matemática mais explícita, a saber, a prova de teoremas. Através da análise da prova de um resultado simples da aritmética dos números naturais, os principais conceitos lógicos vão sendo gradativamente apresentados e o leitor é levado a compreender a lógica como uma atividade crítica e não apenas como uma coleção desconexa de conceitos e resultados artificiais.

Os autores.

Capítulo 1

Lógica Sentencial

1.1 Motivação

1.1.1 Um Exemplo

O texto em destaque a seguir é uma página típica de um livro de Matemática. Embora ele deva ser lido com toda a atenção, nosso objetivo é utilizá-lo apenas como referência para algumas questões e conceitos que serão introduzidos.

Números Primos e Compostos

Se a, b e c são inteiros tais que $a \cdot b = c$, dizemos que a e b são *fatores* (ou *divisores*) de c e que c é um múltiplo de a e b. Como $3 \times 4 = 12$, o número 3 é um fator de 12 e o número 12 é um múltiplo de 3. Também 4 é um fator de 12 e 12 é um múltiplo de 4. O número 12 tem ainda outros fatores. Por exemplo, -2, já que $(-2) \times (-6) = 12$.

Consideremos agora os inteiros maiores que 1, isto é, $2, 3, 4, \ldots$ Cada um destes números pode ser classificado como *primo* ou *composto*. Um número inteiro positivo p, maior que 1, é *primo* se os únicos inteiros positivos que são fatores de p são o 1 e o próprio p. Todo número inteiro positivo maior que 1 que não é primo é *composto*. Assim, n é composto se possui fatores diferentes de 1 e de n. Por exemplo, 5 é primo, já que seus únicos fatores positivos são 1 e 5. Por outro lado, 10 é composto, pois 2 é um fator de 10, e 2 é diferente de 1 e 10.

Teorema *Todo número inteiro positivo maior que* 1 *tem um fator primo.*

Prova: Seja n um inteiro positivo maior que 1. Sabemos que n é primo ou n não é primo. Se n é primo, como $1 \cdot n = n$, então n é um fator de n e o teorema está provado. Se n não é primo, então n é composto. Assim:

$$n = n_1 \cdot n_2$$

onde n_1 e n_2 são inteiros positivos, ambos menores que n. Se n_1 é primo, o teorema está provado. Se não:

$$n_1 = n_3 \cdot n_4$$

onde n_3 e n_4 são inteiros positivos, ambos menores que n_1. Novamente, se n_3 é primo, o teorema está provado. Se não, então:

$$n_3 = n_5 \cdot n_6$$

onde n_5 e n_6 são inteiros positivos, ambos menores que n_3. Generalizando o procedimento acima teremos, depois de alguns passos:

$$n_{2k-1} = n_{2k+1} \cdot n_{2k+2}$$

onde n_{2k+1} e n_{2k+2} são inteiros positivos, ambos menores que n_{2k-1}. Como, para qualquer valor de k:

$n > n_1 > n_3 > \cdots > n_{2k-1} > 0$ e $n = n_{2k+1} \cdot n_{2k+2} \cdot n_{2k} \cdot n_{2k-2-} \cdots n_6 \cdot n_4 \cdot n_2$

este procedimento deve terminar, ou seja, deve existir um menor inteiro primo n_{2k+1} que é um fator de n.

Assim, o teorema está provado.

As várias partes que compõem um texto de Matemática podem ser classificadas, em sentido estrito, nas seguintes categorias: *definição, exemplo, teorema* e *prova* (de um teorema). De uma maneira geral, a Lógica Matemática pode ser considerada como o estudo de certos aspectos relacionados a definições, teoremas e provas. Aqui, trataremos apenas de certas noções associadas a teoremas e provas. E, inicialmente, faremos algumas observações sobre um aspecto particular das provas.

1.1.2 Verdades Lógicas

Um *teorema* é uma afirmação verdadeira, a qual estamos tentando justificar. Uma *prova* de um teorema é uma justificativa para que aceitemos a veracidade do teorema. O primeiro aspecto das provas que queremos estudar está exemplificado no teorema que aparece no texto em destaque, apresentado anteriormente. A prova desse teorema inicia do seguinte modo:

Seja n um inteiro positivo maior que 1. Sabemos que n é primo ou n não é primo.

Ou seja, nesta prova tomamos um número inteiro positivo qualquer maior que 1 e apresentamos a seguinte alternativa: ele é primo ou não é primo. No primeiro caso, concluímos trivialmente que ele possui um fator primo. No segundo, fornecemos uma explicação pormenorizada de como, após sucessivas fatorações, podemos encontrar um fator primo do tal número. Um passo fundamental da prova foi a consideração da frase:

n é primo ou n não é primo.

Examinando esta frase um pouco melhor, vemos que ela apresenta duas possibilidades complementares e excludentes. Ou seja, dado um inteiro positivo qualquer maior que 1, ou ele é primo ou ele não é primo. Observe que o que foi dito não é uma característica apenas de números e de propriedades de números. De fato, dada uma propriedade P qualquer e um objeto a para o qual P faça sentido, a possui ou não possui a propriedade P. Por essa razão, são verdadeiras as sentenças: 2 é par ou 2 não é par, Tarski é brasileiro ou Tarski não é brasileiro, o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento ou o conjunto dos números perfeitos ou não possui um maior elemento, etc.

Em resumo, queremos destacar os seguintes fatos:

1. Existem sentenças verdadeiras que possuem um tipo especial de verdade (que chamaremos de *verdade lógica*).

2. Este tipo especial de sentença verdadeira (que chamaremos de *sentença logicamente verdadeira*) desempenha um papel importante na prova de teoremas.

Assim, um primeiro passo nos estudos de Lógica Matemática é aprender a reconhecer sentenças logicamente verdadeiras. O reconhecimento de verdades lógicas é nossa motivação inicial e quase todos os conceitos que serão desenvolvidos visarão este fim.

1.2 Sintaxe

A *sintaxe* de um sistema lógico trata da formação de sentenças e do estudo das sentenças de acordo com a maneira como são formadas.

1.2.1 Formação de Sentenças

Como vimos na Seção 1.1, as sentenças:

- 2 é par ou 2 não é par,

- Tarski é brasileiro ou Tarski não é brasileiro e

- o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento ou o conjunto dos números perfeitos não possui um maior elemento

são logicamente verdadeiras porque afirmam duas possibilidades complementares e excludentes. Este fato nos leva a considerar que a verdade lógica de uma sentença está associada à maneira como ela foi formada. Assim, nosso primeiro passo no reconhecimento das verdades lógicas será o estudo da formação de sentenças.

Inicialmente, estudaremos a formação de sentenças por meio das partículas *não, e, ou, se...então* e *se, e somente se*. Estas são algumas das partículas mais utilizadas na linguagem matemática.

Sentenças

Em seu nível mais elementar, a lógica trata das sentenças e dos diversos modos de combiná-las.

Definição 1.1 *Uma* sentença *é uma expressão de uma dada linguagem que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, de maneira exclusiva, em um dado contexto.*

Exemplo 1 *São exemplos de sentenças:*

a) A cidade de Cubatão é poluída.

b) A Amazônia é um deserto.

c) Aristóteles é alto ou não.

d) Boole é e não é escocês.

As expressões acima são sentenças pois, no contexto usual, podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Em particular, a primeira e a terceira são verdadeiras, enquanto que a segunda e a quarta são falsas.

A definição 1.1 restringe a aplicação da palavra 'sentença', quando utilizada em lógica. De uma maneira geral, as linguagens possuem outras expressões além daquelas classificadas como sentenças, no sentido acima.

Exemplo 2 *Não são exemplos de sentenças:*

a) Estude para a prova.

b) Que prova difícil!

c) Quanto você tirou na prova?

As expressões acima não são sentenças, pois não podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. São, respectivamente, uma frase imperativa, uma frase exclamativa e uma frase interrogativa.

Conectivos

Outra característica essencial a todas as sentenças é que, além de poderem ser classificadas como verdadeiras ou falsas, também podem ser utilizadas na formação de outras sentenças.

Exemplo 3 *Sentenças podem ser combinadas para formar sentenças por meio de expressões como* e, ou, mas, porém*, que são aplicadas a duas sentenças. Por exemplo, dadas as sentenças:*

- A Matemática é uma ciência exata.

- A Aritmética é um ramo da Matemática.

- Frege formalizou a Aritmética.

- A formalização de Frege é inconsistente.

por aplicações das expressões e, ou, mas, *e* porém*, podemos formar as sentenças:*

- A Matemática é uma ciência exata e a Aritmética é um ramo da Matemática.

- Frege formalizou a Aritmética mas a formalização de Frege é inconsistente.

- Frege formalizou a Aritmética e a formalização de Frege é inconsistente, porém a Aritmética é um ramo da Matemática e a Matemática é uma ciência exata.

Também podemos formar sentenças a partir de sentenças, por aplicação de expressões como não *e* é possível que*, que são aplicadas a uma única sentença:*

- A Matemática não é uma ciência exata.

- É possível que Frege tenha formalizado a Aritmética.

- Frege formalizou a Aritmética e é possível que a formalização de Frege seja inconsistente.

Embora as expressões *não*, *e*, *ou*, *mas*, *porém* e *é possível que* não possuam todas a mesma classificação gramatical, do ponto de vista da Lógica todas possuem a mesma função, a saber, a de formar sentenças a partir de uma ou mais sentenças previamente dadas. Em Lógica, as expressões utilizadas para este fim recebem uma denominação especial.

Definição 1.2 *Um* conectivo *é uma expressão de uma dada linguagem, utilizada para formar sentenças a partir de sentenças dadas.*

Exemplo 4 *Dadas as sentenças* 2 é par *e* $3 < 2$*, podemos formar, por exemplo, as seguintes sentenças:*

a) 2 é par e $3 < 2$.

b) 2 é par ou $3 < 2$.

c) Se 2 é par, então $3 < 2$.

d) 2 é par se, e somente se, $3 < 2$.

e) 2 não é par.

Uma maneira adequada de se considerar os conectivos é pensar neles como operações. Uma *operação* é uma maneira de combinar elementos para formar novos elementos. Por exemplo, a operação de adição que associa aos números 1 e 2 o número 3. No caso dos conectivos os elementos operados são sentenças e o resultado obtido é uma nova sentença.

Exemplo 5 *O* não *pode ser considerado como uma operação que associa, por exemplo, à sentença* 2 é par*, a sentença* 2 não é par*. Assim, diferentemente da sua classificação gramatical usual, em Lógica, o* não *é classificado como conectivo.*

Peso de um conectivo

Observe que, no Exemplo 4, para formar a sentença:

e) 2 não é par,

aplicamos o conectivo *não* a uma única sentença, a saber: 2 é par; enquanto que, para formar as sentenças:

a) 2 é par e $3 < 2$,

b) 2 é par ou $3 < 2$,

c) Se 2 é par, então $3 < 2$ e

d) 2 é par se, e somente se, $3 < 2$,

aplicamos os conectivos *e*, *ou*, *se...então* e *se, e somente se* a duas sentenças.

Os conectivos são classificados de acordo com o número de sentenças que necessitam para a formação de uma nova sentença.

Definição 1.3 *O* peso *de um conectivo é o número exato de sentenças utilizadas para formar uma nova sentença, por meio deste conectivo.*

Exemplo 6 *A tabela abaixo lista os pesos dos conectivos.*

Conectivo	*Peso*
não	*1*
e	*2*
ou	*2*
se...então	*2*
se, e somente se	*2*

Embora todos os conectivos exerçam o mesmo papel na formação de sentenças, situações muito diferentes podem acontecer ao se avaliar as sentenças obtidas por aplicação destes conectivos. Assim, devido a grande quantidade de conectivos e a diversidade na maneira de usá-los na avaliação de sentenças, numa primeira abordagem, não se faz um estudo geral dos conectivos. Ao invés disto, o que fazemos é fixar apenas um pequeno grupo de conectivos, que possuam características afins, e estudá-los de maneira detalhada. Como já dissemos anteriormente, nosso objetivo é estudar certos aspectos lógicos da atividade matemática. Assim, consideraremos apenas os conectivos *não*, *e*, *ou*, *se...então* e *se, e somente se*. Tradicionalmente, estes são os conectivos considerados no tratamento lógico do raciocínio matemático. Salvo menção explícita em contrário, sempre que usarmos a palavra 'conectivo' estaremos nos referindo a um dos conectivos *não*, *e*, *ou*, *se...então* e *se, e somente se*.

Sentenças atômicas e sentenças moleculares

Podemos agora classificar as sentenças de acordo com o fato de terem sido ou não obtidas a partir de sentenças anteriores por meio de conectivos.

Definição 1.4 *Uma sentença é* atômica *se nela não ocorrem conectivos.*

As sentenças atômicas são consideradas as sentenças básicas, isto é, aquelas a partir das quais todas as outras sentenças podem ser formadas.

Exemplo 7 *São exemplos de sentenças atômicas:*

a) 3 é primo.

b) 2 é maior que 0.

c) Todo homem é mortal.

d) É necessário urgência no envio desta carta.

As sentenças acima são atômicas pois em nenhuma delas ocorre não, e, ou, se...então *ou* se, e somente se.

Definição 1.5 *Uma sentença é* molecular *se não é atômica, isto é, se nela ocorre pelo menos um conectivo.*

Exemplo 8 *São exemplos de sentenças moleculares:*

a) 5 não é primo.

b) Se Gotlob Frege estiver certo e Bertrand Russell resolver o paradoxo, então a Matemática será apenas um ramo da Lógica.

As sentenças são moleculares pois em cada uma delas ocorre pelo menos um conectivo. Na primeira ocorre o conectivo não, *enquanto que na segunda ocorrem os conectivos* e *e* se...então.

Classificação das sentenças moleculares

Podemos ainda classificar as sentenças moleculares pelo modo como foram obtidas a partir de outras sentenças por aplicação dos conectivos.

No caso do *não*, temos a seguinte definição:

Definição 1.6 *Uma sentença é uma* negação *se é obtida de uma outra sentença por intermédio do conectivo* não.

Exemplo 9 *A sentença* não é o caso que João gosta de Maria *ou seja,* João não gosta de Maria, *é a negação da sentença* João gosta de Maria.

Neste exemplo, salientamos o uso freqüente da expressão não é o caso que *como* não.

Observe que, como o *não* é um conectivo de peso 1, para se obter uma negação, o *não* deve ser aplicado a uma única sentença. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.7 *A sentença utilizada na formação de uma negação é chamada a* sentença negada *ou* componente *da negação. De uma maneira geral, se α é uma sentença qualquer, dizemos que α é a* sentença negada *da negação* não é o caso que α.

Exemplo 10 *Na negação* não é o caso que $1 + (1 + 1) \neq 3 \times 1$, *ou seja,* não é o caso que $1 + (1 + 1)$ não é igual a 3×1, *a sentença negada é* $1 + (1 + 1)$ não é igual a 3×1, *que por sua vez é uma negação cuja sentença negada é* $1 + (1 + 1)$ é igual a 3×1.

Neste exemplo, salientamos o uso freqüente, em Matemática, de uma simbologia especial para a negação de sentenças.

No caso do *e*, temos a seguinte definição:

Definição 1.8 *Uma sentença é uma* conjunção *se é obtida de duas outras sentenças por intermédio do conectivo* e.

Exemplo 11 *A sentença* 3 não divide 6 nem 8, *ou seja,* 3 não divide 6 e 3 não divide 8, *é a conjunção da sentença* 3 não divide 6 *com a sentença* 3 não divide 8. *Estas por sua vez são, respectivamente, as negações das sentenças* 3 divide 6 3 divide 8.

Neste exemplo salientamos a necessidade de algumas vezes termos de reescrever as sentenças para explicitar sua formação a partir dos conectivos.

Observe que, como o *e* é um conectivo de peso 2, para se obter uma conjunção, o *e* deve ser aplicado a duas sentenças. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.9 *As sentenças utilizadas na formação de uma conjunção são chamadas* componentes *da conjunção. De uma maneira geral, se α e β são sentenças quaisquer, dizemos que α é a* primeira componente *e que β é a* segunda componente *da conjunção α* e *β.*

Exemplo 12 *A sentença* $3 \times 2 = 6$ e $2 + 2 \neq 5$ *é uma conjunção, pois foi obtida a partir das sentenças componentes* $3 \times 2 = 6$ *e* $2 + 2 \neq 5$ *pelo uso do conectivo* e. *Dizemos ainda que a sentença* $3 \times 2 = 6$ *é a* primeira componente *da conjunção e a sentença* $2 + 2 \neq 5$ *é a* segunda componente *da conjunção.*

No caso do *ou*, temos a seguinte definição:

Definição 1.10 *Uma sentença é uma* disjunção *se for obtida de duas outras sentenças por intermédio do conectivo* ou.

Exemplo 13 *A sentença* 2 é par ou não é natural, *ou seja,* 2 é par ou 2 não é natural, *é a disjunção da sentença* 2 é par *com a sentença* 2 não é natural.

Observe que, como o *ou* é um conectivo de peso 2, para se obter uma disjunção, o *ou* deve ser aplicado a duas sentenças. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.11 *As sentenças utilizadas na formação de uma disjunção são chamadas* componentes *da disjunção. De uma maneira geral, se α e β são sentenças quaisquer, dizemos que α é a* primeira componente *e que β é a* segunda componente *da disjunção α* ou *β.*

Exemplo 14 *A sentença* 2 é um número par ou eu como o meu chapéu *é uma disjunção, pois foi obtida a partir das sentenças componentes* 2 é um número par eu vou comer o meu chapéu *pelo uso do conectivo* ou. *Dizemos ainda que a sentença* 2 é um número par *é a* primeira componente *da disjunção e a sentença* eu vou comer o meu chapéu *é a segunda componente da disjunção.*

No caso do *se...então*, temos a seguinte definição:

Definição 1.12 *Uma sentença é uma* implicação *se é obtida de duas outras sentenças por intermédio do conectivo* se...então.

Exemplo 15 *A sentença* o sistema de Frege é inconsistente se Bertrand Russell descobriu um paradoxo, *ou seja,* se Bertrand Russell descobriu um paradoxo, então o sistema de Frege é inconsistente, *é a implicação da sentença* o sistema de Frege é inconsistente *pela sentença* Bertrand Russell descobriu um paradoxo.

Neste exemplo salientamos o uso freqüente da expressão se *como* se...então.

Observe que, como o *se...então* é um conectivo de peso 2, para se obter uma implicação, o *se...então* deve ser aplicado a duas sentenças. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.13 *As sentenças utilizadas na formação de uma implicação são chamadas* componentes *da implicação. De uma maneira geral, se α e β são sentenças quaisquer, dizemos que α é a* antecedente *e que β é a* conseqüente *da implicação* se α, então β.

Exemplo 16 *A sentença* se Poincaré acha a Lógica importante, então todo mundo acha a Lógica importante *é uma implicação, pois foi obtida a partir das sentenças componentes* Poincaré acha a Lógica importante todo mundo acha a Lógica importante *pelo uso do conectivo* se...então*. Dizemos ainda que a sentença* Poincaré acha a Lógica importante *é o* antecedente *da implicação e a sentença* todo mundo acha a Lógica importante *é o* conseqüente *da implicação.*

Observe que, neste caso, não dizemos primeira *e* segunda *componentes.*

No caso do *se, e somente se*, temos a seguinte definição:

Definição 1.14 *Uma sentença é uma* biimplicação *se é obtida de duas outras sentenças por intermédio do conectivo* se, e somente se*.*

Exemplo 17 *A sentença* David Hilbert está errado se, e somente se, há um problema que não possui solução *é a bimplicação das sentenças* David Hilbert está errado há um problema que não possui solução*.*

Observe que, como o *se, e somente se* é um conectivo de peso 2, para se obter uma biimplicação, o *se, e somente se* deve ser aplicado a duas sentenças. Assim, temos a seguinte definição:

Definição 1.15 *As sentenças utilizadas na formação de uma biimplicação são chamadas* componentes *da biimplicação. De uma maneira geral, se α e β são sentenças quaisquer, dizemos que α é a* primeira componente *e que β é a* segunda componente *da biimplicação* α se, e somente se β*.*

Exemplo 18 *A sentença* o número de átomos no universo é primo se, e somente se, não possui divisores próprios *é uma biimplicação, pois foi obtida a partir das sentenças componentes* o número de átomos no univeros é primo *e* o número de átomos no universo não possui divisores próprios *pelo uso do conectivo* se, e somente se*. Dizemos ainda que a sentença* o número de átomos no univeros é primo *é a primeira componente da biimplicação e a sentença* o número de átomos no universo não possui divisores próprios *é a segunda componente da biimplicação.*

1.2.2 Reescrita de Sentenças

Ambigüidade

Na Seção 1.2.1, classificamos as sentenças moleculares de acordo com a maneira como são formadas a partir de outras sentenças, por aplicação dos conectivos. Em alguns casos, as sentenças tiveram que ser reescritas, para que pudessem ser classificadas. Embora a reescrita de sentenças seja uma necessidade natural, na verdade, nem toda sentença pode ser trivialmente reescrita para que possamos classificá-la em uma das categorias definidas. Veremos agora que como a formação de sentenças usualmente não obedece a regras precisas, em certos casos, classificar uma sentença como atômica ou molecular pode ser uma tarefa difícil.

Exemplo 19 *Vejamos alguns exemplos.*

a) *Considere a sentença* 4 é diferente de 0*. Se não levarmos em conta que o significado da expressão 'ser diferente de' é o mesmo que o da expressão 'não ser igual a', concluímos que a sentença é atômica pois nela não ocorrem conectivos. Por outro lado, se levarmos em conta a identidade destes significados, a sentença poderá ser reescrita como* 4 não é igual a 0 *e daí ser classificada como molecular pois nela ocorre o conectivo* não.

b) *Considere a sentença* Richard Dedekind e Giuseppe Peano são casados*. Levando em conta o significado da sentença, concluímos que esta deve ser reescrita como* Richard Dedekind é casado e Giuseppe Peano é casado *pois, obviamente, não estamos querendo dizer que ambos são casados um com o outro e sim que cada um deles é casado com sua respectiva esposa. Portanto, esta sentença é uma conjunção e deve ser classificada como molecular.*

   Por outro lado, considere a sentença Kurt Gödel e Hao Wang são amigos*. Levando em conta o significado da sentença, concluímos que esta não pode ser reescrita como* Kurt Gödel é amigo e Hao Wang é amigo*, como fizemos com a sentença anterior. De fato, quando dizemos que duas pessoas são amigas, estamos querendo dizer que elas são amigas uma da outra e não atribuindo uma propriedade a cada uma delas isoladamente. Assim, esta sentença deve ser classificada como atômica pois a expressão 'e' que nela ocorre não deve ser confundida com o conectivo* e.

c) *Considere a sentença* Maria e João são casados*. Aqui temos um caso ambígüo. De fato, levando em conta somente o significado da sentença, não podemos concluir se ela deve ou não ser reescrita como* Maria é casada e João é casado*. Quando dizemos que um homem e uma mulher são casados podemos tanto estar querendo dizer que eles são casados um com o outro quanto que eles são casados, mas com pessoas* *diferentes. Tudo depende do contexto em que a sentença está inserida. Assim, esta sentença tanto pode ser usada para afirmar uma relação entre duas pessoas quanto para atribuir uma propriedade a cada uma delas isoladamente. Dependendo do contexto associado, esta sentença pode ser classificada tanto como atômica quanto molecular.*

d) Considere a sentença traga sua esposa ou venha sozinho e tenha uma noite agradável. *Levando em conta a maneira como está escrita, esta sentença pode ser lida de dois modos diferentes. De fato, considerando que a sentença é obtida a partir das sentenças* traga sua esposa *e* venha sozinho e tenha uma noite agradável *por aplicação do conectivo* ou, *a sentença pode ser lida como* traga sua eposa, ou venha sozinho e tenha uma noite agradável. *Por outro lado, considerando que a sentença é obtida a partir das sentenças* traga sua esposa ou venha sozinho *e* tenha uma noite agradável, *por aplicação do conectivo* e, *a sentença pode ser lida como* traga sua esposa ou venha sozinho, e tenha uma noite agradável. *No primeiro caso, a sentença é uma disjunção. No segundo, a sentença é uma conjunção. Examinando os significados de cada sentença reescrita, concluímos que cada uma delas possui um conteúdo bastante diferente do da outra.*

Os exemplos anteriores mostram algumas sentenças que podem ser consideradas ambígüas em relação a maneira como são formadas. Esta ambigüidade decorre basicamente do seguinte:

- Presença implícita de conectivos (no sentido lógico). Tal é o caso do exemplo 19 (a).
- Presença explícita de expressões consideradas como conectivos (no sentido lógico) desempenhando um papel diferente daquele desempenhado pelos conectivos. Tal é o caso do exemplo 19 (c).
- Ausência de uma notação que indique precisamente de que maneira esta sentença foi formada a partir de senteças anteriores. Tal é o caso do exemplo 19 (d).

A presença de ambigüidades acarreta a possibilidade de leituras distintas para uma mesma sentença e isto pode acarretar análises lógicas incompatíveis. Somos levados, então, a introduzir a reescrita de sentenças, de modo que sua formação obedeça a regras precisas e ambigüidades sejam evitadas.

Regras de reescrita

Na tentativa de evitar ambigüidades, é usual reescrevermos as sentenças de modo que sua formação obedeça a regras precisas. Estas regras decorrem das seguintes considerações:

- Como estamos considerando apenas sentenças que são formadas a partir de outras sentenças pelo uso dos conectivos, as sentenças atômicas são consideradas como as unidades básicas a partir das quais todas as outras sentenças são formadas. Assim, um primeiro passo na formação de sentenças não ambígüas é explicitar as sentenças atômicas que estão sendo utilizadas.

- Para eliminar ambigüidades decorrentes dos vários usos dos conectivos em outras linguagens, na Linguagem da Lógica, o número, a forma e o uso dos conectivos na formação de sentenças moleculares são definidos precisamente.

- Para facilitar a reescrita e enfatizar que os conectivos estão sendo utilizados num sentido restrito, em relação a maneira como são usados em outras linguagens, na Linguagem da Lógica, os conectivos são simbolizados conforme a seguinte tabela:

Conectivo	Símbolo
não	$\neg$
e	$\wedge$
ou	$\vee$
se...então	$\rightarrow$
se, e somente se	$\leftrightarrow$

Temos, então, as seguintes regras de reescrita:

Sentenças atômicas

Regra 1 *Uma sentença atômica deve ser reescrita encerrada entre parênteses.*

Exemplo 20 *Como não possuem a ocorrência de conectivos, as sentenças:*

a) 7 é primo.

b) 8 é maior que 0.

c) É necessário que Maria pegue o trem.

d) Todo homem é mortal.

são atômicas. Assim, devem ser reescritas encerradas entre parênteses:

a) (7 é primo)

b) (8 é maior que 0)

c) (é necessário que Maria pegue o trem)

d) (todo homem é mortal)

Negações

REGRA 2 *Uma negação deve ser reescrita como* $(\neg\alpha)$*, onde* α *é a sentença negada, previamente reescrita.*

Exemplo 21 *a) A negação* 7 não é primo *deve ser reescrita como* (¬(7 é primo))*. De fato, a sentença é obtida pela aplicação do* não *à sentença* 7 é primo*. Esta última deve ser reescrita como* (7 é primo)*. Assim, aplicando a Regra 2 a esta sentença atômica reescrita, temos a reescrita da negação.*

b) A negação não é o caso que 7 não seja primo *deve ser reescrita como* (¬(¬(7 é primo)))*. De fato, a sentença é obtida pela aplicação do* não *à sentença* 7 não é primo *que deve ser reescrita como* (¬(7 é primo))*. Assim, aplicando a Regra 2 a esta negação reescrita, temos a reescrita da negação original.*

Conjunções

REGRA 3 *Uma conjunção deve ser reescrita como* $(\alpha \wedge \beta)$*, onde* α *e* β *são suas componentes, previamente reescritas.*

Exemplo 22 *a) A conjunção* 3 não é primo nem é maior que 0*, ou seja,* 3 não é primo e 3 não é maior que 0*, deve ser reescrita como* ((¬(3 é primo)) ∧ (¬(3 é maior que 0)))*. De fato, a conjunção é obtida por aplicação do conectivo* e *às sentenças* 3 não é primo *e* 3 não é maior que 0 *que, segundo as regras anteriores, devem ser reescritas, respectivamente, como* (¬(3 é primo)) *e* (¬(8 é maior que 0))*. Aplicando agora a Regra 3 às duas sentenças reescritas, temos a reescrita da conjunção.*

b) Como já discutimos anteriormente, a conjunção João e Maria foram à feira *é ambígüa pois não sabemos se devemos interpretá-la como* João foi à feira e Maria foi à feira *ou como* João e Maria foram à feira, juntos*. Esta ambigüidade de significado acarreta ambigüidade de formação, pois não sabemos decidir se ela deve ser classificada como atômica ou molecular. Para reescrever as sentenças onde ocorrem este tipo de ambigüidade, faremos a convenção de considerá-las sempre como sentenças moleculares, mesmo que haja risco de mudarmos o conteúdo da sentença.*

Assim, a sentença deve ser reescrita como ((João foi à feira) ∧ (Maria foi à feira))*.*

Disjunções

REGRA 4 *Uma disjunção deve der reescrita como* $(\alpha \vee \beta)$*, onde* α *e* β *são suas componentes, previamente reescritas.*

Exemplo 23 *a) A disjunção* 2 não é maior que 0, ou 3 é primo e 2 é maior que 0 *deve ser reescrita como* ((¬(2 é maior que 0)) ∨ ((3 é primo) ∧ (2 é maior que 0)))

b) A conjunção 2 não é maior que 0 ou 3 é primo, e 2 é maior que 0 *deve ser reescrita como* (((¬(2 é maior que 0)) ∨ (3 é primo)) ∧ (2 é maior que 0)). *Observe que, neste caso, a primeira componente é uma disjunção que foi reescrita de acordo com a Regra 4.*

Implicações

REGRA 5 *Uma implicação deve ser reescrita como* $(\alpha \rightarrow \beta)$*, onde* α *é o antecedente e* β *o conseqüente, previamente reescritos.*

Exemplo 24 *a) Considerando o significado da sentença* João vai à praia sempre que faz sol *concluímos que ela deve ser reescrita como* se faz sol, então João vai à praia. *Assim, a sentença original é uma implicação que deve ser reescrita como* ((faz sol) → (João vai à praia)). *Neste exemplo, salientamos o uso da expressão 'sempre que' como* se...então.

b) Considerando o significado da sentença caso chova, João não vai à piscina*, concluímos que ela deve ser reescrita como* se chover, então João não vai à piscina. *Assim, a sentença original é uma implicação que deve ser reescrita como* ((chove) → (¬ (João vai à piscina))). *Neste exemplo, salientamos o uso da expressão 'caso' como* se...então.

Biimplicações

REGRA 6 *Uma biimplicação deve ser reescrita como* $(\alpha \leftrightarrow \beta)$*, onde* α *e* β *são suas componentes, previamente reescritas.*

Exemplo 25 *A biimplicação* Paulo emagrecerá se, e somente se, não beber muito refrigerante e não comer macarrão *deve ser reescrita como* ((Paulo emagrece) ↔ (¬ (Paulo não bebe muito refrigerante)) ∧ (¬(Paulo come macarrão))). *Neste exemplo salientamos que* *na análise lógica das sentenças, não estamos levando em conta o tempo verbal. Assim, sempre que possível, as as sentenças devem ser reescritas com o verbo no presente do indicativo.*

1.2.3 Simbolização de Sentenças

Voltando às sentenças:

a) 2 é par ou 2 não é par,

b) Tarski é brasileiro ou Tarski não é brasileiro e

c) o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento ou o conjunto dos números perfeitos não possui um maior elemento,

observamos que todas são disjunções e que são reescritas como:

a) ((2 é par) $\vee$ ($\neg$(2 é par))),

b) ((Tarski é brasileiro) $\vee$ ($\neg$(Tarski é brasileiro))) e

c) ((o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento) $\vee$ ($\neg$(o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento))).

Examinaremos agora cada uma em separado.

a) A sentença ((2 é par) $\vee$ ($\neg$(2 é par))) é a disjunção da sentença atômica (2 é par) com a sentença ($\neg$ (2 é par)), que é a negação de (2 é par). Como a sentença apresenta duas alternativas das quais a primeira é verdadeira, a sentença é verdadeira.

b) A sentença ((Tarski é brasileiro) $\vee$ ($\neg$ (Tarski é brasileiro))) é a disjunção da sentença (Tarski é brasileiro), que é atômica, com a sentença ($\neg$(Tarski é brasileiro)) que é a negação de (Tarski é brasileiro). Como a sentença apresenta duas alternativas das quais a segunda é verdadeira, a sentença é verdadeira.

c) A sentença ((o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento) $\vee$ ($\neg$(o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento))) é a disjunção da sentença atômica (o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento) com a sentença ($\neg$(o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento)) que é a negação de (o conjunto dos números perfeitos possui um maior elemento). Esta sentença também apresenta duas alternativas das quais uma deve ser verdadeira. Até o momento em que este texto foi escrito, a questão da existência de uma maior número perfeito ainda não havia sido resolvida. Assim, não sabemos qual das duas alternativas é a verdadeira. No entanto, como já dissemos anteriormente, as duas alternativas apresentadas na sentença são complementares e excludentes. Por isso, uma delas, com certeza, é verdadeira (embora não saibamos qual) e por isso a sentença também é verdadeira.

Observe que a mesma explicação dada sobre a verdade da última sentença acima também pode ser aplicada às outras duas sentenças, ou seja, como as sentenças expressam alternativas excludentes e complementares as sentenças são verdadeiras, independente do conhecimento que possuímos sobre a verdade ou falsidade de suas componentes (embora nos dois primeiros casos tenhamos usado este conhecimento para determinar a verdade das sentenças). Dizemos, então, que a verdade das sentenças acima não depende do contexto em que as sentenças estão inseridas, mas apenas da maneira como foram formadas. E, por isso, são verdades lógicas.

Dada uma sentença α, nosso objetivo é determinar se α é uma verdade lógica, ou não. Para isso, devemos determinar se α é verdadeira em todos os contextos, ou não. O fato de uma sentença ser verdadeira em todos os contextos depende da maneira como a sentença foi formada e não do seu conteúdo. As regras de reescrita nos permitem explicitar como as sentenças são formadas. Vamos agora introduzir a simbolização das sentenças, como o passo final que nos permitir "esconder" o seu conteúdo e explicitar a sua forma.

Descrever um processo que possa ser aplicado na simbolização de sentenças não é uma tarefa muito fácil. Muitas vezes, dada uma sentença, é difícil decidir que caminho tomar para obter uma simbolização adequada. Neste texto, sempre que possível, o processo de simbolização será efetuado segundo os seguintes passos:

PASSO 1) Classificar a sentença como atômica ou molecular.

PASSO 2) Classificar todos os conectivos que ocorrem na sentença.

PASSO 3) Determinar se a sentença é negação, conjunção, disjunção, implicação ou biimplicação.

PASSO 4) Reescrever a sentença de acordo com as regras de reescrita.

PASSO 5) Simbolizar a sentença reescrita, substituindo as sentenças atômicas pelas letras p, q, r, s ou t (indexadas ou não), de modo que cada ocorrência de uma mesma sentença atômica seja substituída sempre pela mesma letra e que sentenças atômicas distintas sejam substituídas por sentenças atômicas distintas.

Exemplo 26 *Apresentamos a seguir alguns exemplos de simbolização, efetuados segundo os passos acima.*

a) Rafael é feliz.

Efetuando o processo de simbolização, temos:

PASSO 1) *Atômica.*

Passo 2) *Não pode ser aplicado.*

Passo 3) *Não pode ser aplicado.*

Passo 4) (Rafael é feliz)

Passo 5) *A sentença pode ser simbolizada como:*

p, *onde:*
p : (Rafael é feliz)

b) Rafael é feliz e Júlia gosta dele.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Rafael é feliz e Júlia gosta de Rafael. *Efetuando o processo de simbolização, temos:*

Passo 1) *Molecular.*

Passo 2) *Possui ocorrência do conectivo* e.

Passo 3) *Conjunção.*

Passo 4) ((Rafael é feliz) $\wedge$ (Júlia gosta de Rafael))

Passo 5) *A sentença pode ser simbolizada como:*

$(p \wedge q)$, *onde:*
p : (Rafael é feliz)
q : (Júlia gosta de Rafael)

Observe que esta sentença não pode ser simbolizada como $(p \wedge p)$, pois as sentenças atômicas que a compõem são distintas.

c) Rafael será feliz caso Júlia goste de Rafael.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como se Júlia gostar de Rafael, então Rafael será feliz. *Efetuando o processo de simbolização, temos:*

Passo 1) *Molecular.*

Passo 2) *Possui ocorrência do conectivo* se...então.

Passo 3) *Implicação.*

Passo 4) ((Júlia gosta de Rafael) $\rightarrow$ (Rafael é feliz))

Passo 5) *A sentença pode ser simbolizada como:*

$(p \rightarrow q)$, *onde:*
p : (Júlia gosta de Rafael)
q : (Rafael é feliz)

Neste exemplo ilustramos o uso da expressão 'caso' como se...então.

d) Rafael é feliz pois Júlia gosta dele.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Júlia gosta de Rafael, e se Júlia gostar de Rafael, então Rafael será feliz. *Efetuando o processo de simbolização, temos:*

PASSO 1) *Molecular.*

PASSO 2) *Possui ocorrência dos conectivos* e *e* se...então.

PASSO 3) *Conjunção cuja segunda componente é uma implicação.*

PASSO 4) ((Júlia gosta de Rafael) $\wedge$ ((Júlia gosta de Rafael) $\rightarrow$ (Rafael é feliz)))

PASSO 5) *A sentença pode ser simbolizada como:*

$(p \wedge (p \rightarrow q))$, *onde:*
p : (Júlia gosta de Rafael)
q : (Rafael é feliz)

Neste exemplo ilustramos o uso da expressão 'pois' como uma combinação dos conectivos e *e* se...então.

e) Rafael é feliz, dado que Júlia gosta de Rafael e ela é feliz.

Primeiramente, a sentença deve ser reescrita como Júlia gosta de Rafael e Júlia é feliz, e se Júlia gostar de Rafael e Júlia for feliz, então Rafael será feliz. *Efetuando o processo de simbolização, temos:*

PASSO 1) *Molecular.*

PASSO 2) *Possui ocorrência dos conectivos* e *e* se...então.

PASSO 3) *Conjunção cuja primeira componente é uma conjunção (de sentenças atômicas) e cuja segunda componente é uma implicação (cujo antecedente é uma conjunção de sentenças atômicas e cujo conseqüente é uma sentença atômica).*

PASSO 4) (((Júlia gosta de Rafael) $\wedge$ (Júlia é feliz)) $\wedge$ (((Júlia gosta de Rafael) $\wedge$ (Júlia é feliz)) $\rightarrow$ (Rafael é feliz))).

PASSO 5) *A sentença pode ser simbolizada como:*

$((p \wedge q) \wedge ((p \wedge q) \rightarrow r))$, *onde:*
p : (Júlia gosta de Rafael)
q : (Júlia é feliz)
r : (Rafael é feliz)

Exemplo 27 *Nos exemplos a seguir, não explicitamos os passos do processo de simbolização.*

a) $2 + 2 \neq 4$

$(\neg p)$, *onde:*
p : $(2 + 2 = 4)$

b) 0 e 2 são pares.

$(p \wedge q)$, *onde:*
p : (0 é par)
q : (2 é par)

c) Kurt Gödel e Hao Wang são amigos.

p, *onde:*
p : (Kurt Gödel e Hao Wang são amigos)

d) 1 está entre 0 e 2.

p, *onde:*
p : (1 está entre 0 e 2)

e) 1 é maior que 0 e 2 também.

$(p \wedge q)$, *onde:*
p : (1 é maior que 0)
q : (2 é maior que 0)

f) Todos os números naturais são reais.

p, *onde:*
p : (todos os números naturais são reais)

g) Os números 2, 3 e 5 são primos.

$((p \wedge q) \wedge r)$, *onde:*
p : (o número 2 é primo)
q : (o número 3 é primo)
r : (o número 5 é primo)

h) Ao menos um dos números 1, 2 e 3 é primo.

$((p \vee q) \vee r)$, *onde:*
p : (1 é primo)
q : (2 é primo)
r : (3 é primo)

i) Exatamente um dos números 1, 2 e 4 é primo.

$((((p \vee q) \vee r) \wedge (p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r))) \wedge (q \rightarrow (\neg p \wedge \neg r))) \wedge (r \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)),$
onde:
p : (1 é primo)
q : (2 é primo)
r : (4 é primo)

A sentença acima também poderia ser simbolizada como a disjunção:
$((p \wedge (\neg q \wedge \neg r)) \vee (q \wedge (\neg p \wedge \neg r))) \vee (r \wedge (\neg p \wedge \neg q))$.

1.3 Semântica

1.3.1 Função de Verdade

Segundo a definição, uma sentença é verdadeira ou falsa, de maneira exclusiva, em um dado contexto. Vamos agora estudar um processo de avaliação das sentenças, ou seja, uma maneira de dada uma sentença α, determinar se α é verdadeira ou falsa em um dado contexto. Nosso objetivo é determinar se α é verdadeira em todos os contextos, ou não.

Definição 1.16 *Os* valores de verdade *são o V (*verdadeiro*) e o F (*falso*). Uma sentença é* verdadeira *se seu valor de verdade é V e é* falsa *se seu valor de verdade é F.*

Da definição de sentença decorre que uma sentença possui um único valor de verdade em um dado contexto. A avaliação de uma sentença é a determinação deste valor de verdade.

Sentenças atômicas

Com relação à avaliação de sentenças atômicas, assumimos o seguinte:

1. Como as sentenças atômicas são as unidades básicas a partir das quais todas as outras sentenças são formadas, consideramos não existir nenhum vínculo entre os valores de verdade das sentenças atômicas. Assim, quando sentenças atômicas são listadas, não levamos em conta nenhum vínculo entre seus valores de verdade.

Exemplo 28 *Dadas as sentenças atômicas* (chove lá fora) *e* (o chão está molhado)*, não levamos em conta os possíveis vínculos que venham a existir entre seus valores de verdade. Por exemplo, a segunda ser uma conseqüência da primeira.*

2. O valor de verdade de uma sentença atômica depende exclusivamente do contexto ao qual a sentença está associada.

Exemplo 29 *Somente pessoas que possuem algum conhecimento sobre a história da lógica sabem que a sentença atômica* (Gerhard Gentzen provou a consistência da aritmética) *é verdadeira.*

O exemplo acima nos mostra que só podemos avaliar uma sentença atômica se conhecemos o contexto ao qual ela está associada.

Sentenças moleculares

Com relação a avaliação de sentenças moleculares, várias situações podem acontecer.

1. O valor de verdade de uma sentença molecular pode depender ou não do valor de verdade das suas componentes.

Exemplo 30 *a) Considere a conjunção* ((2 é par) $\wedge$ (3 é ímpar))*. Esta é uma sentença verdadeira, pois afirma dois fatos que realmente acontecem. A conjunção afirma que cada uma das componentes* (2 é par) *e* (3 é ímpar) *é verdadeira e estas realmente são sentenças verdadeiras. Assim, a conjunção é verdadeira.*

b) Por outro lado, a conjunção ((2 é par) $\wedge$ (3 é par)) *é falsa, pois afirma dois fatos acontecem e um deles, na verdade, não acontece. A conjunção afirma que cada uma das componentes* (2 é par) *e* (3 é par) *é verdadeira mas a segunda componente, na verdade, é uma sentença falsa. Assim, a conjunção é falsa.*

O exemplo acima mostra que o valor de verdade de uma conjunção pode depender do valor de verdade das suas componentes, sendo verdadeira ou falsa, segundo estes valores.

Exemplo 31 *Considere a disjunção* ((amanhã vai chover) $\vee$ ($\neg$(amanhã vai chover))). *No caso desta sentença, uma situação diferente daquela apresentada no Exemplo 30 acontece. De fato, a disjunção é verdadeira pois afirma que duas alternativas, das quais uma sempre acontece, é verdadeira. Agora, exatamente porque, das alternativas oferecidas, uma das duas sempre acontece, em qualquer contexto que enunciássemos esta disjunção, teríamos:*

i. Caso amanhã chova, a sentença é verdadeira, pois sua primeira componente é verdadeira.

ii. Caso amanhã não chova, a sentença é verdadeira, pois sua segunda componente é verdadeira.

Assim, a disjunção é verdadeira e verdadeira em qualquer contexto em que for enunciada. Ou seja, seu valor de verdade não depende do valor de verdade das suas componenetes, pois este é pré fixado, a saber, verdadeiro em todos os contextos.

O exemplo acima mostra que, em alguns casos, o valor de verdade de uma sentença molecular pode não depender do valor de verdade de suas componentes e ser pré fixado para qualquer contexto. (Como já dissemos anteriormente estamos particularmente interessados em caracterizar as sentenças que possuem esta propriedade, devido ao papel importante que desempenham na prova de teoremas.)

O que devemos examinar agora é como funciona a dependência entre os valores de verdade de uma sentença composta e o valor de verdade das suas componentes.

2. Existem casos em que o valor de verdade de uma sentença molecular pode ser determinado exclusivamente a partir dos valores de verdade das suas sentenças componentes.

Exemplo 32 *Considere as sentenças atômicas* (2 é par) *e* (3 é par). *Sabemos que estas sentenças são verdadeira e falsa, respectivamente.*

Considere agora as sentenças moleculares ((2 é par) $\wedge$ (3 é par)) *e* ((2 é par) $\vee$ (3 é par)), *obtidas por aplicações dos conectivos* e *e* ou, *respectivamente, às sentenças dadas. Quanto ao valor de verdade destas sentenças moleculares, temos o seguinte:*

i. A conjunção é falsa, pois afirma que duas coisas devem acontecer e é dado que uma delas não acontece.

ii. A disjunção é verdadeira, pois oferece duas alternativas das quais sabemos que acontece.

3. Existem casos em que o valor de verdade de uma sentença molecular não pode ser determinado exclusivamente a partir dos valores de verdade das sentenças componentes, mas depende de *alguma coisa a mais*, por exemplo, a ordem em que os fatos narrados pelas suas componentes realmente aconteceram, além destes valores.

Exemplo 33 *Considere as sentenças atômicas* (Tarzan tirou a roupa) *e* (Tarzan caiu no rio)*, as quais admitimos serem ambas verdadeiras.*

Considere agora as sentenças moleculares ((Tarzan tirou a roupa) $\wedge$ (Tarzan caiu no rio)) *e* ((Tarzan caiu no rio) $\wedge$ (Tarzan tirou a roupa))*, obtidas por aplicações do conectivo* e *às sentenças dadas. Quanto ao valor de verdade destas sentenças moleculares, temos o seguinte:*

i. Uma das duas conjunções deve ser vardadeira, pois admitimos que ambas as componentes são verdadeiras.

ii. Não sabemos dizer qual das duas é verdadeira, pois não sabemos em que ordem os fatos registrados nas sentenças atômicas ocorreram.

Temos, então, a importante definição:

Definição 1.17 *Um conectivo é* por função de verdade *se o valor de verdade das sentenças moleculares obtidas por seu intermédio é determinado única e exclusivamente a partir dos valores de verdade das sentenças componentes.*

Com relação à avaliação de sentenças moleculares, adotaremos a seguinte convenção:

> Os conectivos *não*, *e*, *ou*, *se...então* e *se, e somente se* são por função de verdade.

1.3.2 Regras de avaliação e tabelas de verdade dos conectivos

As regras de avaliação descrevem como podemos determinar o valor de verdade de uma sentença molecular, dados os valores de verdade das suas componentes. Estas regras são definidas em conformidade com o uso que se faz dos conectivos *não*, *e*, *ou*, *se…então* e *se, e somente se*, na Linguagem Matemática.

Negação

Na Linguagem Matemática, o *não* é utilizado quando queremos negar o conteúdo de uma sentença.

Exemplo 34 *Por exemplo, na Teoria dos Conjuntos usamos o* não *quando definimos a complementação de conjuntos. Esta é a operação que associa a cada subconjunto A, de um dado universo U, um outro conjunto $\overline{A}$, chamado o* complemento *de A, formado pelos elementos de U que não pertencem a A. Dado $u \in U$, a condição para que u esteja em $\overline{A}$ é que u não esteja em A e a condição para que u esteja em A é que u não esteja em $\overline{A}$. Em outras palavras:*

$$u \in \overline{A} \text{ é verdadeira se, e somente se, } u \in A \text{ é falsa.}$$

Temos, então, a seguinte regra de avaliação para negações:

REGRA 1 Uma negação é verdadeira se a sentença negada é falsa. E é falsa se a sentença negada é verdadeira.

Assim, para uma sentença qualquer α, temos:

$$\neg\alpha \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ é falsa}$$

$$\neg\alpha \text{ é falsa se } \alpha \text{ é verdadeira}$$

Esta regra pode ser sumarizada na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade do não*:

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

Conjunção

Na Linguagem Matemática, o *e* é utilizado quando queremos afirmar a ocorrência simultânea de dois fatos.

Exemplo 35 *Por exemplo, na Teoria dos Conjuntos, usamos o* e *quando definimos a interseção de conjuntos. Esta é a operação que associa a dois subconjuntos A e B, de um dado universo U, um outro subconjunto $A \cap B$, chamado a* interseção *de A com B, formado pelos elementos de U que estão simultaneamente em A e em B. Dado $u \in U$, a condição para que u esteja em $A \cap B$ é que u esteja em A* e *u esteja em B. Com isto, queremos dizer que u deve estar em A e, ao mesmo tempo, em B. Assim, a condição para que u não esteja em $A \cap B$ é que u não esteja em ao menos um dos conjuntos A ou B. Em outras palavras:*

$u \in A \cap B$ é verdadeira
se, e somente se,
$u \in A$ e $u \in B$ são simultaneamente verdadeiras.

Temos, então, a seguinte regra de avaliação para conjunções:

REGRA 2 Uma conjunção é verdadeira se suas componentes são simultaneamente verdadeiras. E é falsa quando ao menos uma das suas componentes é falsa.

Assim, dadas duas sentenças quaisquer α e β, temos:

$(\alpha \wedge \beta)$ é verdadeira se α e β são verdadeiras

$(\alpha \wedge \beta)$ é falsa se α é falsa e β é verdadeira

$(\alpha \wedge \beta)$ é falsa se α é verdadeira e β é falsa

$(\alpha \wedge \beta)$ é falsa se α e β são falsas

Esta regra pode ser sumarizada na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade do e*:

α	β	$\alpha \wedge \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

Na Linguagem Matemática, o *ou* é utilizado quando queremos apresentar alternativas. Mas isto é feito de uma maneira muito particular.

Exemplo 36 *Por exemplo, na Teoria dos Conjuntos, usamos o* ou *quando definimos a união de conjuntos. Esta é a operação que associa a dois subconjuntos A e B, de um dado universo U, um outro subconjunto $A \cup B$, chamado a* união de A e B, *formado pelos elementos de U que estão apenas em A, os que estão apenas em B e os que estão simultaneamente em A e em B. Dado $u \in U$, a condição para que u esteja em $A \cup B$ é que u esteja em A* ou *u esteja em B. Com isto, queremos dizer que u pode estar só em A, pode estar só em B ou, ainda, pode estar em ambos A e B. Assim, a condição para que u não esteja em $A \cup B$ é que u não esteja em nenhum dos conjuntos A e B. Em outras palavras:*

$u \in A \cup B$ é falsa
se, e somente se,
$u \in A$ e $u \in B$ são simultaneamente falsas.

Temos, então, a seguinte regra de avaliação para disjunções:

Regra 3 Uma disjunção é falsa se suas componentes são simultaneamente falsas. E é verdadeira quando ao menos uma das suas componentes é verdadeira.

Assim, dadas duas sentenças quaisquer α e β, temos:

$$(\alpha \vee \beta) \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ e } \beta \text{ são verdadeiras}$$

$$(\alpha \vee \beta) \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ é verdadeira e } \beta \text{ é falsa}$$

$$(\alpha \vee \beta) \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ é falsa e } \beta \text{ é verdadeira}$$

$$(\alpha \vee \beta) \text{ é falsa se } \alpha \text{ e } \beta \text{ são falsas}$$

Esta regra pode ser sumarizada na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade do ou*:

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esta maneira peculiar de usar o *ou* não é própria da Linguagem Matemática, mas também é freqüente na Língua Portuguesa.

Exemplo 37 *Usualmente, quando dizemos* amanhã o tempo vai ficar nublado ou vai chover*, não estamos excluíndo a possibilidade de ambas as coisas acontecerem ao mesmo tempo.*

Este é o uso do *ou* no *sentido não-exclusivo* ou *inclusivo*. Mas também existe uma outra maneira de usar o *ou* que talvez seja ainda mais freqüente na Língua Portuguesa que o uso do *ou* no sentido não-exclusivo.

Exemplo 38 *Usualmente, quando dizemos* Marcelo vai de carro ou de ônibus*, estamos querendo dizer que uma das duas coisas acontece, mas não é o caso que ambas aconteçam ao mesmo tempo.*

Este é o uso do *ou* no *sentido exclusivo*. Embora na língua portuguesa o uso do *ou* no sentido exclusivo seja mais freqüente, por uma questão de tradição, na Linguagem Matemática o *ou* é utilizado mais comumente no sentido inclusivo.

Na Linguagem Matemática, o *ou* é utilizado nos dois sentidos. Por exemplo, 0 é par ou ímpar e 2 é natural ou real.

Biimplicação

Na Linguagem Matemática, o *se, e somente se* é utilizado quando queremos dizer que duas sentenças têm o mesmo conteúdo.

Exemplo 39 *Considere a seguinte definição, da Geometria Euclideana Plana:*

> **Definição** *Duas retas são paralelas* se, e somente se, *não coincidem e não possuem pontos em comum.*

Na definição acima estamos identificando os conteúdos das sentenças duas retas são paralelas *e* duas retas não coincidem e não possuem pontos em comum*.*

O exemplo acima nos leva a considerar que para a avaliação de biimplicações deveríamos utilizar um critério como o seguinte:

> *Uma biimplicação é verdadeira se suas componentes possuem o mesmo conteúdo e é falsa quando suas componentes possuem conteúdos distintos.*

Mas, como estamos considerando que o conectivo *se, e somente se* é por função de verdade, a única informação que poder ser utilizada quanto ao conteúdo das sentenças componentes, na avaliação de sentenças moleculares formadas por seu intermédio, são os valores de verdade destas sentenças. Assim, temos a seguinte regra de avaliação para biimplicações:

REGRA 4 Uma biimplicação é verdadeira se suas componentes possuem os mesmos valores de verdade e é falsa quando suas componentes possuem valores de verdade distintos.

Assim, dadas duas sentenças quaisquer α e β, temos:

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ e } \beta \text{ são verdadeiras}$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ é falsa se } \alpha \text{ é verdadeira e } \beta \text{ é falsa}$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ é falsa se } \alpha \text{ é falsa e } \beta \text{ é verdadeira}$$

$$(\alpha \leftrightarrow \beta) \text{ é verdadeira se } \alpha \text{ e } \beta \text{ são falsas}$$

Esta regra pode ser sumarizada na seguinte tabela, chamada a *tabela de verdade do se, e somente se*:

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Implicação

De uma maneira geral, o *se...então* não é por função de verdade.

Exemplo 40 *Considere as sentenças* Paulo ficou doente *e* o médico deu um remédio para Paulo*, que consideramos verdadeiras.*

a) Se Paulo fica doente, então o médico receita o remédio para Paulo.

   Se a sentença acima for verdadeira, o médico apenas cumpre sua obrigação.

b) Se o médico receita o remédio para Paulo, então Paulo fica doente.

   Se a sentença acima for verdadeira, temos dois casos:

   i. Se Paulo ficou doente porque tomou o remédio, o médico é um charlatão.

   ii. Se Paulo ficou doente por qualquer outro motivo, mas não porque tomou o remédio, não podemos culpar o médico.

Usualmente, o valor de verdade de uma implicação depende da existência de alguma relação de *causa* e *efeito* entre o antecedente e o conseqüente. Assim, usualmente, o *se...então* não é por função de verdade.

Como considerar o *se...então* por função de verdade?

α	β	$\alpha \to \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	?
F	F	?

Teremos quatro casos:

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \to \beta$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V

- No primeiro aso, a tabela de verdade do $\to$ seria mesma que a do $\wedge$.
- No segundo caso, a tabela de verdade do $\to$ seria mesma que a do $\leftrightarrow$.
- No terceiro caso, a tabela de verdade do $\to$ seria mesma que a do β.
- No quarto caso, a tabela de verdade do $\to$ não corresponderia a nenhuma tabela conhecida.

REGRA 5 Uma implicação é falsa se seu antecedente é verdadeiro e seu conseqüente é falso. E é verdadeira em todos os outros casos.

Assim, dadas duas sentenças quaisquer α e β, temos:

$(\alpha \to \beta)$ é verdadeira se α e β são verdadeiras

$(\alpha \to \beta)$ é falsa se α é verdadeira e β é falsa

$(\alpha \to \beta)$ é verdadeira se α é falsa e β é verdadeira

$(\alpha \to \beta)$ é verdadeira se α e β são falsas

Esta regra pode ser sumarizada na segunte tabela, chamada a *tabela de verdade do se...então*:

α	β	$\alpha \to \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Alguns exemplos do uso das tabelas de verdade na avaliação de sentenças moleculares são apresentados a seguir.

Exemplo 41 *Dadas as sentenças atômicas* 0 é par *e* 1 é par*, que são V e F, respectivamente, temos:*

a) 0 não é par *é F.*

b) 1 não é par *é V.*

Exemplo 42 *Dadas as sentenças atômicas* 0 é par*,* 1 é par *e* 2 é par*, que são V, F e V, respectivamente, temos:*

a) 0 é par e 2 é par *é V.*

b) 0 é par e 1 é par *é F.*

c) 1 é par e 2 é par *é F.*

d) 1 é par e 3 é par *é F.*

Exemplo 43 *Dadas as sentenças atômicas* 1 é par*,* 2 é par*,* 2 é primo *e* 3 é par*, que são F, V, V e F, respectivamente, temos:*

a) 2 é par ou 2 é primo *é V.*

b) 2 é par ou 1 é par *é V.*

c) 1 é par ou 2 é primo *é V.*

d) 1 é par ou 3 é par *é F.*

Observe que uma disjunção assume o valor V quando suas componentes assumem ambas o valor V. Por esta razão, em Lógica Matemática, o *ou* é dito ser usado no *sentido inclusivo.*

Exemplo 44 *Dadas as sentenças atômicas* 0 é par, 1 é par, 2 é par *e* 3 é par, *que são V, F, V e F, respectivamente, temos:*

a) Se 0 é par, então 2 é par *é V.*

b) Se 0 é par, então 1 é par *é F.*

c) Se 1 é par, então 0 é par *é V.*

d) Se 1 é par, então 3 é par *é V.*

Exemplo 45 *Dadas as sentenças atômicas* 0 é par, 1 é par *e* 2 é par, *que são V, F e V, respectivamente, temos:*

a) 0 é par se, e somente se, 2 é par *é V.*

b) 0 é par se, e somente se, 1 é par *é F.*

c) 1 é par se, e somente se, 2 é par *é F.*

d) 1 é par se, e somente se, 3 é par *é V.*

1.3.3 Interpretações

O valor de verdade de uma sentença molecular pode depender ou não do contexto associado. Ou seja, existem sentenças que são sempre verdadeiras, independente do contexto. Sentenças que são às vezes verdadeiras, às vezes falsas, dependendo do contexto. E sentenças que são sempre falsas, independente do contexto. Veremos agora que, para o caso das sentenças formadas pelo uso dos conectivos *não*, *e*, *ou*, *se...então* e *se, somente se* (que possuem tabelas de verdade), dada uma sentença qualquer, podemos decidir em qual dos casos ela está inserida.

Exemplo 46 *Considere as seguintes sentenças:*

a) Chove ou não chove.

b) Brasília é a capital do Brasil e São Paulo é a maior cidade da América Latina.

c) Faz sol e não faz sol.

Avaliando estas sentenças, concluímos que 1 é verdadeira e sempre verdadeira, independente do contexto; 2 é verdadeira, mas poderia ser falsa, dependendo do contexto; 3 é falsa e sempre falsa, independente do contexto.

Simbolizando, temos:

a) $(p \vee (\neg p))$

b) $(q \wedge r)$

c) $(s \wedge (\neg s))$

onde:

p : (chove)

q : (Brasília é a capital do Brasil)

r : (São Paulo é a maior cidade da América Latina)

s : (faz sol)

Vamos, agora, avaliar estas sentenças utilizando as tabelas de verdade.

a) A sentença $(p \vee (\neg p))$ é formada por aplicação do conectivo $\neg$ à sentença atômica p, obtendo $(\neg p)$ e por aplicação do conectivo $\vee$ às sentenças p e $(\neg p)$. De acordo com a tabela de verdade do $\vee$, o valor de verdade de $(p \vee (\neg p))$ pode ser determinado diretamente a partir dos valores de p e $(\neg p)$. De modo análogo, de acordo com a tabela de verdade do $\neg$, o valor de verdade de $(\neg p)$ também pode ser determinado diretamente a partir do valor de verdade de p. Assim, dado o valor de p, podemos calcular de maneira direta o valor de $(p \vee (\neg p))$, calculando o valor de $(\neg p)$ pela tabela do $\neg$ e calculando o valor de $(p \vee (\neg p))$, usando a tabela do $\vee$. Mas, como p é atômica, o valor de p não pode ser calculado a partir do valor de nenhuma outra sentença. De acordo com a definição de sentença, teremos, então, dois casos:

1. *Se p possui valor V, $(\neg p)$ possui valor F e $(p \vee (\neg p))$ possui valor V.*
2. *Se p possui valor F, $(\neg p)$ possui valor V e $(p \vee (\neg p))$ possui valor V.*

Como, em ambos os casos, a sentença $(p \vee (\neg p))$ possui valor V e estes são os únicos casos possíveis, concluímos que $(p \vee (\neg p))$ é uma verdade lógica, pois sempre assume valor V.

O que foi dito acima pode ser sumarizado na seguinte tabela, chamada a tabela de verdade de $(p \vee (\neg p))$*:*

p	$(\neg p)$	$(p \vee (\neg p))$
V	F	V
F	V	V

b) *A sentença* $(q \wedge r)$ *é formada por aplicação do conectivo* $\wedge$ *às sentenças atômicas* q *e* r*. De acordo com a tabela de verdade do* $\wedge$ *, o valor de verdade de* $(q \wedge r)$ *pode ser determinado diretamente a partir dos valores de* q *e* r*. Como* q *e* r *são atômicas, os valores de* q *e* r *não podem ser calculados a partir do valor de nenhuma outra sentença. De acordo com a definição de sentença teremos, então, quatro casos:*

1. *Se* q *e* r *possuem ambas o valor* V*,* $(q \wedge r)$ *possui valor* V*.*
2. *Se* q *possui valor* V *e* r *possui valor* F*,* $(q \wedge r)$ *possui valor* F*.*
3. *Se* q *possui valor* F *e* r *possui valor* V*,* $(q \wedge r)$ *possui valor* F*.*
4. *Se* q *e* r *possuem ambos valor* F*,* $(q \wedge r)$ *possui valor* F*.*

Os dois primeiros casos acima são suficientes para concluirmos que $(q \wedge r)$ *não é uma verdade lógica, pois pode assumir tanto o valor* V *como o valor* F*.*

O que foi dito acima pode ser sumarizado na seguinte tabela, chamada a tabela de verdade de $(q \wedge r)$*:*

q	r	$(q \wedge r)$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

c) *A sentença* $(s \wedge (\neg s))$ *é formada por aplicação do conectivo* $\neg$ *à sentença atômica* s*, obtendo* $(\neg s)$ *e por aplicação do conectivo* $\wedge$ *às sentenças* s *e* $(\neg s)$*. De acordo com a tabela de verdade do* $\wedge$ *, o valor de verdade de* $(s \wedge (\neg s))$ *pode ser determinado diretamente a partir dos valores de* s *e* $(\neg s)$*. Analogamente, de acordo com a tabela de verdade do* $\neg$*, o valor de verdade de* $(\neg s)$ *também pode ser determinado diretamente a partir do valor de verdade de* s*. Assim, dado o valor de* s*, podemos calcular de maneira direta o valor de* $(s \wedge (\neg s))$*. Como* s *é atômica, o valor de* s *não pode ser calculado a partir do valor de nenhuma outra sentença. De acordo com a definição de sentença, teremos, então dois casos:*

1. *Se* s *possui valor* V*,* $(\neg s)$ *possui valor* F *e* $(s \wedge (\neg s))$ *possui valor* F*.*
2. *Se* s *possui valor* F*,* $(\neg s)$ *possui valor* V *e* $(s \wedge (\neg s))$ *possui valor* F*.*

Como em ambos os casos $(s \wedge (\neg s))$ *possui valor* F *e estes são os únicos casos possíveis, concluímos que* $(s \wedge (\neg s))$ *sempre possui valor* F*.*

O que foi dito acima pode ser sumarizado na seguinte tabela, chamada a tabela de verdade de $(s \wedge (\neg s))$*:*

s	$(\neg s)$	$(s \wedge (\neg s))$
V	F	F
F	V	F

O Exemplo 46 mostra como podemos associar a sentenças simbolizadas uma tabela de verdade que lista todos os valores de verdade possíveis que esta sentença simbolizada pode assumir. Em particular, inspecionando a tabela de uma sentença podemos determinar se esta sentença é ou não uma verdade lógica.

Apresentaremos agora algumas definições que nos permitirão estender o processo esboçado acima para todas as sentenças simbolizadas.

Definição 1.18 *Uma* interpretação *para uma sentença simbolizada α é uma atribuição de valores de verdade às letras sentenciais que ocorrem em α, de modo que a cada letra seja atribuído um único valor de verdade.*

Exemplo 47 *a) A sentença simbolizada p é atômica e, portanto, possui apenas duas interpretações:*

p
V
F

b) A sentença simbolizada $(p \rightarrow (q \rightarrow p))$ possui ocorrência duas sentenças atômicas p e q. Portanto, possui quatro interpretações:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

c) A sentença simbolizada $(((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)) \rightarrow (p \rightarrow r))$ possui ocorrência das três sentenças atômicas p, q e r. Logo, possui oito interpretações:

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

De uma maneira geral, temos o seguinte resultado:

Proposição 1.1 *Se α é uma sentença simbolizada que possui a ocorrência de m letras sentenciais distintas, então α possui exatamente 2^m interpretações.*

Prova: Seja α uma sentença simbolizada que possui a ocorrência de m letras sentenciais distintas.

De acordo com a definição, cada interpretação para α pode ser visualizada como uma linha de uma tabela:

p_1	p_2	$\ldots$	p_m
		$\ldots$	

onde em cada uma das lacunas ocorre uma das letras V ou F.

Decorre daí que o número de interpretações distintas para α será exatamente o número total de maneiras de preencher cada linha da tabela acima, associando a cada letra sentencial exatamente um dos valores V ou F. Como temos duas possibilidades para cada uma das lacunas e o preenchimento de uma lacuna é independente do preenchimento das outras, pelo Princípio Fundamental da Contagem (da Análise Combinatória), o número total de possibilidades de preenchimento de uma linha é $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{m \text{ vezes}} = 2^m$. ■

(Redução do Número de Parênteses)

Para facilitar a escrita de sentenças simbolizadas, daqui por diante adotaremos as seguintes regras.

Regra 1 Os parênteses externos não serão escritos.

Exemplo 48 *Ao invés de* $((p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q)$, *escreveremos simplesmente:*
$(p \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow q$.

Regra 2 Os parênteses em torno da negação não serão escritos.

Exemplo 49 *Ao invés de* $((\neg q) \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow (\neg p)$, *escreveremos simplesmente:*
$(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$.

Regra 3 O $\rightarrow$ e o $\leftrightarrow$ têm precedência sobre o $\wedge$ e o $\vee$.

Exemplo 50 *Ao invés de* $(\neg q \wedge (p \rightarrow q)) \rightarrow \neg p$, *escreveremos simplesmente:*
$\neg q \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow \neg p$.

REGRA 4 O $\neg$ se aplica à menor sentença que o sucede.

Exemplo 51 *Escreveremos* $\neg(p \wedge q)$, *pois escrevendo* $\neg p \wedge q$ *o* $\neg$ *se aplica somente à sentença* p.

1.4 Tautologias, Contingências e Contradições

Podemos, agora, classificar as sentenças simbolizadas, de acordo com suas tabelas de verdade.

Algumas sentenças são verdadeiras em todas as suas interpretações.

Definição 1.19 *Uma sentença simbolizada* α *é uma* tautologia *se é* V *em todas as suas interpretações.*

Escrevemos $\models \alpha$, ao invés de "α é uma tautologia".

As tautologias são exatamente as verdades lógicas que podem ser formadas utilizando-se somente os conectivos *não*, *e*, *ou*, *se...então* e *se, e somente se* (que possuem tabelas de verdade).

Exemplo 52 *São exemplos de tautologias:*

a) $p \to (q \to p)$

b) $\neg q \to (p \to q)$

c) $(p \to q) \vee (p \to q)$

Assim, α é uma tautologia se, na última coluna de sua tabela de verdade, ocorre somente o valor V.

Algumas sentenças são verdadeiras em algumas de suas interpretações e falsas em outras.

Definição 1.20 *Uma sentença simbolizada* α *é uma* contingência *se é* V *em algumas das suas interpretações e* F *em outras.*

Exemplo 53 *São exemplos de contingências:*

a) $q \wedge (p \to q) \to p$

b) $\neg p \wedge (p \to q) \to \neg q$

c) $(p \wedge q \to r) \to (p \to r) \wedge (q \to r)$

Assim, α é uma contingência se, na última coluna de sua tabela de verdade ocorre tanto o valor V quanto o valor F.

Algumas sentenças são falsas em todas as suas interpretações.

Definição 1.21 *Uma sentença simbolizada α é uma* contradição *se é F em todas as suas interpretações.*

Exemplo 54 *São exemplos de contradições:*

a) $p \land q \leftrightarrow \neg p \lor \neg q$

b) $p \lor q \leftrightarrow \neg p \land \neg q$

c) $\neg (p \to q) \leftrightarrow \neg p \lor q$

Assim, α é uma contradição se, na última coluna de sua tabela de verdade, ocorre somente o valor F.

Temos, então, o conjunto das sentenças simbolizadas particionado em três subconjuntos disjuntos: o conjunto das tautologias, o das contingências e o das contradições.

Principais exemplos de tautologias

Apresentamos a seguir os principais exemplos de tautologias. O leitor deve se familiarizar com estas sentenças, construindo suas tabelas de verdade.

a) $p \land (p \to q) \to q$

b) $\neg q \land (p \to q) \to \neg p$

c) $\neg p \land (p \lor q) \to q$

d) $p \land q \to p$

e) $p \to p \lor q$

f) $p \to (q \to p \land q)$

g) $(p \to q) \land (p \to r) \to (p \to q \land r)$

h) $(p \to q) \land (q \to r) \to (p \to r)$

i) $(p \to q) \land (\neg p \to q) \to q$

j) $(p \lor q \to r) \leftrightarrow (p \to r) \land (q \to r)$

k) $(p \to q \land \neg q) \to \neg p$

l) $p \land \neg p \to q$

m) $p \vee \neg p$

n) $\neg(p \vee \neg p)$

1.5 Equivalência Tautológica

No Exemplo 27, uma mesma sentença foi simbolizada de duas maneiras distintas. Vejamos um outro exemplo.

Exemplo 55 *A sentença* caso João a convide, caso Ricardo a convide, Célia vai ao cinema *pode ser simbolizada como $p \vee q \rightarrow r$, onde:*

p : (João convida Célia)

q : (Ricardo convida Célia)

r : (Célia vai ao cinema).

Mas, levando em conta que a sentença quer dizer que se Célia não foi ao cimema, nem João nem Ricardo a convidou, *temos outra simbolização:* $\neg r \rightarrow \neg p \wedge \neg q$.

Surge, então, a questão de decidir se duas simbolizações distintas expressam o mesmo conteúdo. Esta questão pode ser resolvida com uso das tabelas de verdade, mediante os conceitos a seguir.

Definição 1.22 *Uma* interpretação *para duas sentenças simbolizadas α e β é uma atribuição de valores de verdade às letras sentenciais que ocorrem em α e β.*

Exemplo 56 *As sentenças simbolizadas $p \vee q \rightarrow r$ e $\neg r \vee \neg p \wedge \neg q$ possuem ocorrências das sentenças atômicas p, q e r. Logo, possuem oito interpretações.*

Definição 1.23 *Duas sentenças simbolizadas α e β são* tautologicamente equivalentes *se, em cada interpretação para α e β, os valores de α e β são iguais.*

Escreveremos: $\alpha \models\!\!\!\!\!\!\;\dashv \beta$ no lugar de "α e β são tautologicamente equivalentes".

Exemplo 57 *a)* $p \vee q \rightarrow r \models\!\!\!\!\!\!\;\dashv \neg r \rightarrow \neg p \wedge \neg q$

b) $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q) \models\!\!\!\!\!\!\;\dashv (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$

c) $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee q) \models\!\!\!\!\!\!\;\dashv \neg(p \leftrightarrow q)$

A proposição a seguir relaciona os conceitos de tautologia e equivalêcia tautológica.

Proposição 1.2 *Se α e β são sentenças simbolizadas, então as seguintes condições são equivalentes:*

a) $\alpha \models\!\!\!\!\!\!\;\dashv \beta$

b) $\models \alpha \leftrightarrow \beta$

Prova:
($\Rightarrow$) Suponhamos que $\alpha \models\mid \beta$.

Daí, em cada interpretação para α e β, as sentenças α e β assumem o mesmo valor de verdade.

Construindo a tabela de $\alpha \leftrightarrow \beta$, teremos então que, em cada linha, α e β assumem valores iguais.

Assim, $\alpha \leftrightarrow \beta$ assumirá o valor V em todas as linhas, ou seja, $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.

Daí, em cada linha da tabela de verdade de $\alpha \leftrightarrow \beta$ ocorre a letra V.

Assim, em cada linha, os valores de α e β são iguais.

Como cada linha da tabela inicia com uma interpretação para α e β, as sentenças α e β assumem o mesmo valor de verdade em cada interpretação, ou seja, $\alpha \models\mid \beta$. ∎

Principais equivalências tautológicas

Apresentamos a seguir os principais exemplos de equivalências tautológicas. Para se familiarizar com cada um deles, o leitor deve, para cada item, aplicar a proposição acima e construir a tabela de verdade que verifica a equivalência.

a) $\neg\neg p \models\mid p$

b) $p \wedge q \models\mid q \wedge p$

c) $p \vee q \models\mid q \vee p$

d) $(p \wedge q) \wedge r \models\mid p \wedge (q \wedge r)$

e) $(p \vee q) \vee r \models\mid p \vee (q \vee r)$

f) $(p \wedge q) \vee r \models\mid (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

g) $(p \vee q) \wedge r \models\mid (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

h) $\neg(p \wedge q) \models\mid \neg p \vee \neg q$

i) $\neg(p \vee q) \models\mid \neg p \wedge \neg q$

j) $p \wedge p \models\mid p$

k) $p \vee p \models\mid p$

l) $p \vee (p \wedge q) \models\mid p$

m) $p \wedge (p \vee q) \models\mid p$

1.6 Validade

1.6.1 Passos Lógicos

Nossa motivação para a introdução dos conceitos anteriores foi a determinação da verdade lógica de sentenças. O problema da determinação da verdade lógica foi levantado a partir de um certo aspecto das provas, exemplificado na prova do teorema apresentado na Seção 1.1.

Faremos agora uma outra análise da prova ali apresentada para motivar outra questão fundamental nos estudos de Lógica Matemática.

Outro aspecto das provas, exemplificado no teorema que aparece na motivação, é o uso de certos *passos lógicos* como garantia para a correção da prova. A prova apresentada consiste essencialmente em tomar um número inteiro positivo qualquer n, maior que 1, e efetuar o seguinte raciocínio:

> n é primo ou n não é primo.
>
> No primeiro caso, concluímos trivialmente que n possui um fator primo.
>
> No segundo, fornecemos uma explicação pormenorizada de como encontrar, após sucessivas fatorações, um fator primo de n.

Ou seja, a idéia central da prova pode ser assim sumarizada:

$$\begin{array}{l} (n \text{ é primo}) \vee \neg(n \text{ é primo}) \\ (n \text{ é primo}) \rightarrow (n \text{ possui um fator primo}) \\ \neg(n \text{ é primo}) \rightarrow (n \text{ possui um fator primo}) \\ \text{Logo, } (n \text{ possui um fator primo}) \end{array}$$

Simbolizando, temos a seguinte seqüência:

$$\begin{array}{l} p \vee \neg p \\ p \rightarrow q \\ \neg p \rightarrow q \\ \text{Logo, } q \end{array}$$

onde:

p : (n é primo)

q : (n possui um fator primo)

Esta seqüência simboliza a idéia de que, se temos duas alternativas e cada uma delas nos leva à conclusão que estamos buscando, então podemos garantir que a conclusão deve ser verdadeira.

Em oposição ao que foi dito acima, observe que nenhuma prova correta poderia ser baseada em um passo lógico como:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ \text{Logo, } r \end{array}$$

pois, mesmo garantindo que as $p \to r$ e $q \to r$, não podemos garantir que temos r. De fato, se p, q e r fossem sentenças e fossem todas falsas, teríamos: $p \to r$ é V, $q \to r$ é V, mas r é F. Ou seja, esse não é um passo lógico correto.

Em resumo, queremos destacar os seguintes fatos:

1. Podemos usar seqüências de sentenças para expressar certos passos lógicos.

2. Passos lógicos corretos são freqüentemente utilizados na prova de teoremas.

3. Passos lógicos que não são corretos não devem ser utilizados na prova de teoremas.

Assim, nossa próxima etapa no estudo de Lógica Matemática será aprender a reconhecer seqüências de sentenças que podem ser usados para expressar passos lógicos corretos.

1.6.2 Validade de Argumentos

Seqüências de sentenças nas quais uma é considerada como conclusão das outras recebem uma denominação especial.

Definição 1.24 *Um* argumento *é uma seqüência finita de sentenças, em que uma é considerada como* conclusão *e as demais são chamadas* premissas*. As premissas de um argumento são consideradas como* justificativas *para a conclusão.*

Exemplo 58 *São exemplos de argumentos:*

a) Sócrates é homem.
Todos os homens são mortais.
Logo, Sócrates é mortal.

b) Vovó se chama Ana.
Vovô se chama Lúcio.
Conseqüentemente, eu me chamo Ana Lúcia.

c) Há exatamente 136 caixas de laranja no depósito.
Cada caixa contém pelo menos 140 laranjas.
Nenhuma caixa contém mais do que 166 laranjas.
Deste modo, no depósito estão pelo menos 6 caixas contendo o mesmo número de laranjas.

d) Nunca se provou que existe uma quantidade finita de pares de números naturais da forma $(p, p+2)$, onde p é primo.
Daí, existe uma quantidade infinita de tais pares.

Exemplo 59 *Não são exemplos de argumentos:*

a) Todos os professores que fazem pesquisa gostam de ensinar.
Márcia é uma professora que gosta de ensinar.
Existem professores que não fazem pesquisa.

b) Se a função seno for derivável e se toda função derivável for contínua, então a função seno será contínua.

c) 1 é um número natural e é positivo.
2 é um número natural e é positivo.
3 é um número natural e é positivo.
...
Logo, todo número natural é positivo.

As premissas de um argumento são usadas como justificativas para a sua conclusão. No entanto, existem casos em que as premissas realmente justificam a conclusão e outros em que isto não acontece.

Exemplo 60 *Examinando o Exemplo 58, temos:*

a) No argumento do item (a),as premissas justificam a conclusão.

b) No argumento do item (b),as premissas não justificam a conclusão.

c) No argumento do item (c),é difícil decidir se as premissas justificam a conclusão mas isto pode ser feito com um pouco de manipulação algébrica, se admitimos as propriedades usuais das operações de adição e multiplicação de números inteiros.

d) No argumento do item (d),até hoje não se sabe se as premissas justificam ou não a conclusão.

Utilizamos um argumento quando estamos interessados em provar a verdade de uma determinada sentença. Assim, argumentamos sobre determinadas bases (as premissas), de modo que o que queremos provar (a conclusão) tenha a sua verdade assentada sobre a verdade das premissas. Neste sentido, argumentar corretamente não é o mesmo que estar certo. Mesmo que as bases sobre as quais argumentamos não sejam verdadeiras, podemos efetuar boas argumentações.

Exemplo 61 *Consideremos o seguinte argumento:*

> O conjunto dos números pares é um subconjunto do conjunto dos números naturais. Todo conjunto possui mais elementos que cada um dos seus subconjuntos. *Assim,* existem mais números naturais que números pares.

No argumento anterior, uma das premissas não é verdadeira (qual?). Porém, caso admitamos que ambas as premissas sejam verdadeiras, seremos obrigados a concluir que existem mais números naturais que números pares. Logo, este é um bom argumento (embora uma de suas premissas seja falsa).

O Exemplo 61 mostra que o fator determinante da boa argumentação não está na verdade das premissas sobre as quais ela se assenta, mas sim no fato de que, se aceitarmos as premissas do argumento em questão como verdadeiras, não poderemos considerar falsa a sua conclusão.

Exemplo 62 *O argumento seguinte deve ser classificado como um bom argumento, a partir de qualquer critério razoável, embora até hoje não saibamos se sua premissa (e também conclusão) é uma sentença verdadeira.*

Dizemos que um número natural é perfeito *se é igual à soma de seus divisores próprios. Por exemplo,* $6 = 1 + 2 + 3$ *é perfeito, mas* $10 \neq 1 + 2 + 5$ *não é.*

ARGUMENTO Existe um maior número perfeito.
Portanto, existe um maior número perfeito.

Segundo a definição de sentença, não podemos admitir que ao considerarmos a premissa do argumento acima como verdadeira, sua conclusão seja falsa.

Em decorrência temos a seguinte definição:

Definição 1.25 *(i) Um argumento será* válido *se em qualquer contexto for impossível que sua conclusão seja falsa, caso se admita que suas premissas sejam verdadeiras.*

(ii) Um argumento será inválido *se não for válido, isto é, se for possível que, em algum contexto, admitindo que suas premissas sejam verdadeiras se possa ter a conclusão falsa.*

Veremos na próximo seção como utilizar as tabelas de verdade para verificar a validade de argumentos.

1.6.3 O Método das Tabelas de Verdade

Cada uma das regras de avaliação pode ser interpretada como associando a cada conectivo uma *tabela de verdade* que descreve, de forma sucinta, a dependência entre o valor de verdade de uma sentença simbolizada composta e o valor de verdade de suas componentes.

Para os conectivos considerados as tabelas são as seguintes:

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Estas regras também nos permitem associar, a cada sentença simbolizada α, uma tabela de verdade que descreve o "comportamento de verdade" de α, isto é, que valores de verdade α assume em cada uma das suas interpretações.

Seja α uma sentença simbolizada na qual ocorrem as letras $p_1, \ldots, p_m$. A tabela de verdade de α pode ser construída mediante a execução dos seguintes passos:

PASSO 1) Em uma *linha de referência*, escreva as letras $p_1, \ldots, p_m$.

PASSO 2) Abaixo da linha de referência, escreva todas as 2^m interpretações para α.

PASSO 3) Utilizando as tabelas de verdade dos conectivos, calcule gradativamente todos os valores de verdade de cada sentença simbolizada utilizada na formação de α, até obter o valor de α.

PASSO 4) Ao final do processo, a matriz formada pelas m primeiras colunas em conjunto com a última coluna (aquela indexada por α) será a tabela de α.

Uma aplicação importante das tabelas de verdade é a verificação da validade de argumentos. Conforme foi dito na Seção 1.6.2, um argumento é *válido* quando as premissas do argumento são, de fato, suficientes para justificar a conclusão.

Exemplo 63 *São exemplos de argumentos:*

a) João tem cabeça grande.
Pessoas de cabeça grande são intelectuais.
Logo, João é um intelectual.

Neste caso, as premissas justificam a conclusão.

b) João faz faculdade.
João estuda filosofia.
Logo, João é um intelectual.

Neste caso, as premissas não justificam a conclusão.

Outras maneiras de dizer que um argumento é válido são:

1. A conclusão decorre necessariamente das premissas.

2. A verdade das premissas é suficiente para acarretar a verdade da conclusão.

3. A verdade da conclusão decorre necessariamente da verdade das premissas.

4. Supondo que as premissas sejam verdadeiras, podemos garantir que a conclusão também é verdadeira.

Exemplo 64 *a) Considere o argumento:*

Se o cão está latindo, o cão não está na casa. Se o cão está na casa, então há alguém em frente à porta se o cão está latindo. O cão está latindo, pois o cão está na casa. *Logo,* não é o caso que há alguém em frente à porta ou o cão está latindo.

Reescrevendo, temos:

(o cão está latindo) $\rightarrow$ ($\neg$(o cão está na casa))
(o cão está na casa) $\rightarrow$
((o cão está latindo) $\rightarrow$ (há alguém em frente à porta))
(o cão está na casa) $\rightarrow$ (o cão está latindo)
Logo, ($\neg$(há alguém em frente à porta)) $\vee$ (o cão está latindo)

Simbolizando, temos:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow \neg q \\ q \rightarrow (p \rightarrow r) \\ q \rightarrow p \\ \hline \neg r \vee p \end{array}$$

onde:

p : (o cão está latindo)

q : (o cão está na casa)

r : (há alguém em frente à porta)

Será este argumento válido?

b) Considere o seguinte argumento:

Se o cão está latindo, o cão está na casa. Se o cão está na casa, então o cão não está latindo ou há alguém em frente à porta. Na realidade, o cão está latindo. *Logo,* não é o caso que há alguém em frente à porta.

Reescevendo, temos:

(o cão está latindo) $\rightarrow$ (o cão está na casa)
(o cão está na casa) $\rightarrow$
(($\neg$(o cão está latindo)) $\vee$ (há alguém em frente à porta))
(o cão está latindo)
Logo, ($\neg$(há alguém em frente à porta))

Simbolizando, temos:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to (\neg p \vee r) \\ \underline{p \qquad\qquad\quad} \\ \neg r \end{array}$$

onde:

p : (o cão está latindo)

q : (o cão está na casa)

r : (há alguém em frente à porta)

Será este argumento válido?

c) *Considere o argumento:*

7 é par se é divisível por 2. 7 é divisível por 2. *Logo,* 7 é par.

Reescrevendo, temos:

(7 é divisível por 2) $\to$ (7 é par)
(7 é divisível por 2)
Logo, (7 é par)

Simbolizando, temos:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array}$$

onde:

p : (7 é divisível por 2)

q : (7 é par)

Será este argumento válido?

Vamos agora determinar a validade dos argumentos acima, utilizando as tabelas de verdade. Inicialmente, consideraremos o caso mais simples, ou seja, o argumento do item *(c)* Utilizando a definição de validade, não podemos determinar diretamente a validade do argumento *(c)* pois, no contexto associado ao argumento, uma de suas premissas é falsa. Mas, como a própria definição dá a entender, para a determinação da validade, não estamos interessados em saber o que acontece apenas no contexto original e sim nos contextos em que as premissas são simultaneamente verdadeiras.

Definição 1.26 *Um argumento é* válido *se, em todos os contextos em que as premissas são simultaneamente V, a conclusão também é V.*

Ou seja, um argumento é válido se não existe um contexto em que as premissas sejam simultaneamente V e a conclusão F.

No caso dos conectivos que possuem tabelas, contexto é o mesmo que interpretação. Assim, podemos reescrever a definição:

Definição 1.27 *Um argumento é* válido *se, em todas as interpretações para as premissas e conclusão simbolizadas em que as premissas são simultaneamente V, a conclusão também é V.*

Ou seja, um argumento é válido se não existe uma interpretação para as premissas e conclusão simbolizadas em que as premissas sejam simultaneamente V e a conclusão F.

Neste caso, verificar a validade se resume em verificar se:

i) Em todas as linhas da tabela de verdade em que as premissas são simultaneamente V, a conclusão é V (válido).

ii) Existe uma linha da tabela de verdade em que as premissas são simultaneamente V e a conclusão é F (inválido).

Exemplo 65 *a) De acordo com a tabela:*

p	q	$p \to q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

o argumento (c)*:*

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad\quad} \\ q \end{array}$$

é válido, pois, em todas as interpretações em que as premissas são simultaneamente V (no caso, somente a primeira), a conclusão é V.

b) Considere um exemplo simples:

7 ser par é necessário para que seja divisível por 2. 7 é par. *Logo,* 7 é divisível por 2.

Reescrevendo, temos:

(7 é divisível por 2) $\rightarrow$ (7 é par)
(7 é par)
Logo, (7 é divisível por 2)

Simbolizando, temos:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ \underline{q \qquad} \\ p \end{array}$$

onde p e q são como no item (c) do Exemplo 64.

De acordo com a tabela:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

o argumento é inválido, pois existe uma interpretação (a terceira) em que as premissas são simultaneamente V, a conclusão é F.

O conectivo que expressa a simultaneidade dos valores de verdade das sentenças componentes é o $\wedge$. De fato, temos que $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ é V se, e somente se, cada um dos α_i, $1 \leq i \leq m$, é V. Assim, para verificar a validade do argumento:

$$\begin{array}{l} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \underline{\alpha_m \quad} \\ \beta \end{array}$$

devemos verificar se a tabela:

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$	β
V	V
V	F
F	V
F	F

não possui a ocorrência da segunda linha, ou seja, se nunca temos a sentença simbolizada $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ assumindo o valor V e β assumindo o valor F, o que é equivalente a determinar se $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta$ é sempre V, pois o único caso em que a simbolização assume o valor F é aquele em que o antecedente assume valor V e o conseqüente assume valor F.

$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$	β	$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \to \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemplo 66 *a) De acordo com a tabela:*

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$p \wedge (p \to q) \to q$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

o argumento:

$$\begin{array}{l} p \\ p \to q \\ \hline q \end{array}$$

é válido, pois $\models p \wedge (p \to q) \to q$.

b) De acordo com a tabela:

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge q$	$(p \to q) \wedge q \to p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	F	V

o argumento:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \\ \hline p \end{array}$$

é inválido, pois $(p \to q) \wedge q \to p$ *não é uma tautologia.*

Vamos agora verificar a validade dos argumentos *(a)* e *(b)* do Exemplo *(c)*.

Exemplo 67 *a) Desenvolvendo a tabela:*

p	q	r	$(p \to \neg q) \wedge (q \to (p \to r)) \wedge (q \to p) \to (\neg r \vee p)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

vemos que o argumento:

$$\begin{array}{l} p \to \neg q \\ q \to (p \to r) \\ q \to p \\ \hline \neg r \vee p \end{array}$$

é válido, pois $\models (p \to \neg q) \wedge (q \to (p \to r)) \wedge (q \to p) \to (\neg r \vee p)$.

b) Desenvolvendo a tabela:

p	q	r	$(p \to q) \wedge (q \to (\neg p \vee r)) \wedge p \to \neg r$
V	V	V	F
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

vemos que o argumento:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to (\neg p \vee r) \\ p \\ \hline \neg r \end{array}$$

é inválido, pois $(p \to q) \wedge (q \to (\neg p \vee r)) \wedge p \to \neg r$ *não é uma tautologia.*

O método

Em resumo, temos o seguinte:

Definição 1.28 *Uma* interpretação *para as sentenças simbolizadas* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *é uma atribuição de valores de verdade às letras sentenciais que ocorrem em* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$*, de modo que, a cada letra sentencial, seja atribuído um único valor.*

Definição 1.29 *Sejam* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ *sentenças simbolizadas.* β *é uma* conseqüência tautológica *de* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$*, denotado* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \models \beta$*, se, em todas as interpretações para* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ *em que* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ *são simultaneamente* V*,* β *também é* V*.*

Escreveremos $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \models \beta$ no lugar de "β é uma conseqüência tautológica de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$".

Proposição 1.3 *Se* $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ *são sentenças simbolizadas, então as seguintes condições são equivalentes:*

a) $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \models \beta$

b) $\models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta$

Prova:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \models \beta$.

Vamos mostrar que, se $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta$ não fosse uma tautologia, teríamos uma contradição.

De fato, se $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta$ não fosse uma tautologia, pela tabela do $\rightarrow$, teríamos que $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ seria V e β seria F.

Daí, pela tabela do $\wedge$, teríamos que cada α_i, $1 \leq i \leq m$, seria V.

Mas, pela hipótese, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \models \beta$ e, assim, se todos os $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ fossem V, teríamos que β também seria V, uma contradição.

Logo, $\models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta$.

($\Leftarrow$) Suponhamos que $\models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta$.

Suponhamos também que cada um dos α_i, $1 \leq i \leq m$, é V.

Daí, pela tabela do $\wedge$, a conjunção $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m$ é V.

Como $\models \alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta$, pela tabela do $\rightarrow$, teremos que β é V.

Logo, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \models \beta$. ∎

Assim, o Método das Tabelas de Verdade para verificar a validade de argumentos é o seguinte:

Passo 1) Reescrever o argumento.

Passo 2) Simbolizar as premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ e a conclusão β do argumento.

Passo 3) Verificar, utilizando as tabelas de verdade, se a sentença simbolizada $\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta$ é uma tautologia. Se sim, o argumento é válido. Caso contrário, é inválido.

Capítulo 2

Lógica Monádica

2.1 O Cálculo Sentencial

Uma *sentença* é uma expressão de uma dada linguagem que pode ser classificada como verdadeira ou falsa, de maneira exclusiva, em um dado contexto.

Um *conectivo* é uma expressão de uma dada linguagem utilizada para formar sentenças a partir de sentenças dadas.

Sentenças são classificadas de acordo com a ocorrência ou não de conectivos. Sentenças *atômicas* não possuem ocorrências de conectivos. Sentenças *moleculares* são formadas a partir de outras sentenças pelo uso de conectivos.

No Capítulo 1, estudamos a formação e a avaliação de sentenças, quando somente os conectivos *não*, *e*, *ou*, *se...então* e *se, e somente se* são considerados. A cada um dos conectivos foi associada uma tabela de verdade que descreve como podemos determinar o valor de verdade de uma sentença molecular, obtida por aplicação do conectivo, a partir dos valores de verdade das sentenças componentes. Os conectivos aos quais podemos associar tabelas desse tipo recebem uma denominação especial:

Definição 2.1 *Um conectivo é* por função de verdade *se o valor de verdade (verdadeiro ou falso) das sentenças moleculares obtidas por seu intermédio pode ser determinado única e exclusivamente a partir dos valores de verdade das sentenças componentes.*

Todos os conectivos considerados são por função de verdade.

2.1.1 O CS

A *Lógica Sentencial Clássica* é o estudo da formação e avaliação de sentenças, obtidas por aplicação de conectivos por função de verdade.

No Capítulo 1 estudamos a Lógica Sentencial Clássica levando em conta somente a formação e avaliação de sentenças onde ocorrem os conectivos *não*, *e*, *ou*, *se...então* e *se, e somente se*. Esta parte da Lógica Sentencial Clássica será chamada *Cálculo Sentencial* (CS).

Sintaxe do CS

A formação de sentenças no CS é regulada por regras gramaticais rígidas. A parte do CS que estuda a formação de sentenças é chamada *sintaxe* do CS. Na sintaxe do CS, temos:

I. Um *alfabeto*, cujos símbolos são usados na formação das sentenças simbolizadas.

Definição 2.2 *O* alfabeto *do* CS *consiste dos seguintes símbolos:*

i) Letras sentenciais*: p, q, r ou s (indexadas ou não).*

ii) Conectivos*: $\neg$ (*não*), $\wedge$ (*e*), $\vee$ (*ou*), $\rightarrow$ (*se...então*) e $\leftrightarrow$ (*se, e somente se*).*

iii) Parênteses*: ((abre parênteses) e) (fecha parênteses).*

II. Um conjunto de *regras de formação* que determinam como as sentenças simbolizadas devem ser formadas a partir dos símbolos do alfabeto.

Definição 2.3 *As regras de formação do* CS *são as seguintes:*

Rf_1) Cada letra sentencial é uma sentença simbolizada.

Rf_2) Se α e β são sentenças simbolizadas, então $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são sentenças simbolizadas.

Semântica do CS

A avaliação de sentenças no CS também é regulada por regras rígidas.

A parte do CS que estuda a avaliação de sentenças é chamada *semântica* do CS. Na semântica do CS, temos:

III. Uma tabela de verdade associada a cada conectivo, que determina como cada conectivo deve ser utilizado na avaliação de sentenças.

Definição 2.4 *As* tabelas de verdade dos conectivos *são:*

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \rightarrow \beta$	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

IV. Uma maneira de, utilizando as tabelas dos conectivos, associar a cada sentença simbolizada uma tabela de verdade que descreve o *comportamento de verdade* da sentença, ou seja, que valor uma sentença α assume, para cada uma das atribuições de valores V ou F às letras sentenciais que ocorrem em α.

Definição 2.5 *Uma* interpretação *para uma sentença simbolizada α é uma atribuição de valores V ou F a cada uma das letras sentenciais que ocorre em α.*

Definição 2.6 *A* tabela de verdade *de uma sentença simbolizada na qual ocorrem as letras sentenciais $p_1, \ldots, p_m$ pode ser construída mediante a aplicação das seguintes regras:*

Rt_1) Em uma linha de referência, escreva as letras $p_1, \ldots, p_m$.

Rt_2) Em cada uma das 2^m linhas abaixo da linha de referência, escreva uma das 2^m interpretações para α.

Rt_3) Utilizando as tabelas de verdade dos conectivos, calcule, para cada linha da tabela, o valor de verdade de cada sentença simbolizada utilizada na formação de α, até obter o valor de α.

Tautologias, Contingências e Contradições

Cada sentença simbolizada é classificada segundo sua tabela de verdade.

Definição 2.7 *Uma sentença simbolizada é uma* tautologia *se ocorre V em todas as linhas da última coluna de sua tabela de verdade. É uma* contingência *se ocorre V em algumas linhas da última coluna de sua tabela e ocorre F em outras. E é uma* contradição *se ocorre F em todas as linhas da última coluna de sua tabela de verdade.*

O Método das Tabelas de Verdade

As principais aplicações dos conceitos apresentados são a determinação de verdades lógicas e a verificação da validade de argumentos.

Uma sentença é uma *verdade lógica* se é verdadeira em todos os contextos.

No caso de uma sentença simbolizada α, verificar se α é uma verdade lógica se reduz a verificar se α é uma tautologia. Em particular, se a sentença simbolizada é uma tautologia, a sentença original é classificada como verdade lógica. Se não, a sentença original não é classificada como verdade lógica.

Todos os conceitos e técnicas do CS são elaborados de modo que as sentenças que podem ser simbolizadas como tautologias sejam verdades lógicas. Mas, como veremos adiante, existem outras verdades lógicas além daquelas classificadas como tais, no CS.

Um *argumento* é uma seqüência finita de sentenças em que uma é considerada como *conclusão* e as demais são consideradas como *premissas*. As premissas de um argumento servem como *evidências* para sua conclusão.

Um argumento é *válido* se não existe um contexto em que suas premissas são simultaneamente verdadeiras e a conclusão falsa.

No caso de argumentos simbolizados no CS, verificar a validade de um argumento:

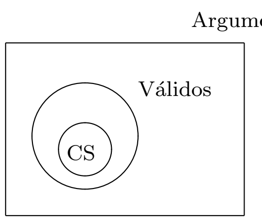
$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}{\beta}$$

se reduz a verificar se a implicação $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_m \rightarrow \beta$ (cujo antecedente é a conjunção das premissas do argumento e cujo conseqüente é a conclusão do argumento) é uma tautologia, ou não. Em particular, se a sentença simbolizada é uma tautologia, o argumento é classificado como válido. Se não, o argumento é classificado como inválido. Todos os conceitos e técnicas do CS são elaborados de maneira que os argumentos que podem ser simbolizados como argumentos válidos são, realmente, válidos. Mas, como veremos adiante, existem outros argumentos válidos além daqueles classificados como tais, no CS.

Em resumo, as tabelas de verdade do CS fornecem um método para a determinação tanto de verdades lógicas quanto da validade de argumentos cujas sentenças são simbolizadas na linguagem do CS. Veremos agora o que acontece com certas sentenças que são verdades lógicas e certos argumentos que são válidos mas que não são classificados como tais no CS.

2.1.2 Insuficiência do CS

Na Seção 1.6.3, verificamos a validade de argumentos no CS, utilizando o Método das Tabelas de Verdade. Todos os argumentos que concluímos serem válidos no CS são, realmente, válidos. Mas, como veremos a seguir, existem argumentos que são válidos mas que o CS garante que não são.



A figura acima ilustra o que foi dito. Nela os argumentos que são válidos no CS constituem apenas uma parte de todos os argumentos válidos. Neste parágrafo, veremos exemplos simples de argumentos utilizados em Matemática que são válidos, mas cuja verificação da validade está fora do escopo dos métodos disponíveis no CS. Em outras palavras, os mecanismos de simbolização e avaliação de sentenças, disponíveis no CS, não são suficientes para determinar a validade de todos os argumentos utilizados em Matemática. Por esta razão, dizemos que o CS é *insuficiente* para os estudos de Lógica Matemática.

Exemplo 1 *Considere o seguinte argumento:*

> Todos os números naturais são números pares.
> Todos os números inteiros são números naturais.
> *Logo,* todos os números inteiros são números pares.

As sentenças que compõem este argumento são classificadas como atômicas, no CS*. Simbolizando, temos:*

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

onde:

p : (todos os números naturais são números pares)

q : (todos os números inteiros são números naturais)

r : (todos os números inteiros são números pares)

Segundo o Método das Tabelas de Verdade, temos que $p \wedge q \models r$ *se, e somente se,* $\models p \wedge q \rightarrow r$.

Construindo a tabela:

p	q	r	$p \wedge q$	$p \wedge q \rightarrow r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	V

verificamos que $p \wedge q \rightarrow r$ *não é uma tautologia. Assim, segundo o Método das Tabelas de Verdade, o argumento é inválido.*

Vamos agora examinar mais detalhadamente cada sentença que compõe o argumento.

1. A primeira premissa é a sentença todos os números naturais são números pares, que expressa uma relação entre as propriedades *ser um número natural* e *ser um número par*. Intuitivamente, toda propriedade define um conjunto, formado pelos elementos que satisfazem essa propriedade. Assim, *ser um número natural* define o conjunto X dos números naturais, e *ser um número par*, o conjunto Y dos números pares. Como a sentença afirma que *todos* os números que são pares também são naturais, ela está afirmando que todos os elementos de X também são elementos de Y.

2. A segunda premissa é a sentença todos os números inteiros são números naturais, que expressa uma relação entre as propriedades *ser um número inteiro* e *ser um número natural*. A propriedade *ser um número inteiro* define o conjunto Z dos números inteiros. Como a sentença afirma que *todos* os números que são pares também são inteiros, ela está afirmando que todos os elementos de Y também são elementos de Z.

   Observe que ambas as premissas são falsas, pois nem todos os naturais são pares e nem todos os inteiros são naturais. Mas, de acordo com a definição, para verificar a validade de um argumento, não estamos interessados nos valores de verdade das premissas do argumento, no contexto em que elas são dadas, mas sim com o que acontece nos contextos em que elas são verdadeiras. Admitamos, então, que ambas as premissas são verdadeiras. Ou seja, admitamos que *todos os elementos de X são elementos de Y* e que *todos os elementos de Y são elementos de Z*.

3. A conclusão é a sentença todos os números inteiros são números pares, que expressa uma relação entre as propriedades *ser um número inteiro* e *ser um número par*, análoga às propriedades que foram expressas pelas premissas. Ou seja, a conclusão afirma que *todos os elementos de X são elementos de Z*. Assim, para que esta sentença seja falsa, terá que existir um elemento x de X que não é um elemento de Z. Mas, como admitimos que ambas as premissas são verdadeiras, temos que todo elemento de X é um elemento de Y. Daí, x também é um elemento de Y. E, do mesmo modo, todo elemento de Y é um elemento de Z. Daí, x é um elemento de Z. Assim, x é e não é um elemento de Z, uma contradição.

   Temos, então, que a conclusão do argumento não pode ser falsa, caso admitamos que as premissas são verdadeiras. Ou seja, concluímos que o argumento é válido, contradizendo a análise feita pelo Método das Tabelas de Verdade.

Observe que, na análise da validade do argumento feita acima, desrespeitamos duas regras básicas que regularam explicitamente todo o nosso estudo da formação e avaliação de sentenças, no CS. De fato:

1. Analisamos a formação de sentenças consideradas atômicas no CS.

2. Analisamos o significado das sentenças, discutindo o papel das partículas *todo* e *existe*, que não fazem parte da linguagem do CS.

Exemplo 2 *Considere agora o seguinte argumento:*

> Todos os números naturais são números pares.
> Existe um número natural.
> *Logo,* existe um número par.

Do mesmo modo que no Exemplo 1, todas as sentenças acima são classificadas como atômicas, no CS*. Simbolizando o argumento, temos:*

$$\begin{array}{c} p \\ q \\ \hline r \end{array}$$

onde:

p *:* (todos os números naturais são números pares)

q *:* (existe um número natural)

r *:* (existe um número par)

Segundo o Método das Tabelas de Verdade, de acordo com a mesma tabela do Exemplo 1, concluímos que o argumento é inválido.

Vamos agora examinar mais detalhadamente cada sentença que compõe o argumento.

1. A primeira premissa é a mesma do argumento anterior e afirma que todos os elementos de X também são elementos de Y.

2. A segunda premissa é a sentença existe um número natural. Como a sentença afirma que *existe* um número natural, ela está afirmando que algum elemento pertence ao conjunto X.

   Observe que, como já vimos anteriormente, a primeira premissa é falsa mas a segunda premissa é verdadeira pois, de fato, existe um número natural. Mas, de acordo com a definição, para verificar a validade de um argumento, não estamos interessados nos valores de verdade das premissas do argumento no contexto em que elas são dadas, mas sim com o que acontece nos contextos em que elas são verdadeiras. Admitamos, então que ambas as premissas são verdadeiras. Ou seja, admitamos que *todos os elementos de X são elementos de Y* e que *existe um elemento em X*.

3. A conclusão é a sentença existe um número par. Como a sentença afirma que *existe* um número par, ela está afirmando que algum elemento pertence ao conjunto Y. Logo, para que esta sentença seja falsa, não poderá existir nenhum elemento em Y e, como os elementos de X também estão em Y, não poderia existir nenhum elemento em X. Assim, existe e não existe um elemento em X, uma contradição.

   Temos, então, que a conclusão não poderá ser falsa, caso admitamos que as premissas são verdadeiras. O argumento é válido, contradizendo análise feita pelo Método das Tabelas de Verdade.

Observe que, na análise da validade do argumento feita acima, desrespeitamos as mesmas regras básicas que regularam nosso estudo do CS desrespeitadas na análise do argumento do Exemplo 1.

Em resumo, queremos destacar os seguintes fatos:

1. Todos os argumentos que mostramos serem válidos utilizando o Método das Tabelas de Verdade são realmente válidos.

2. Existem argumentos simples, utilizados na Matemática, que reconhecemos como válidos, mas que não são classificados como válidos se utilizamos o Método das Tabelas de Verdade.

3. A análise da validade destes argumentos se baseia na análise da formação de sentenças consideradas atômicas no CS e no papel de partículas como *todo* e *existe*, que não fazem parte da linguagem do CS.

Assim, um terceiro passo nos estudos de Lógica Matemática será estudar a formação de sentenças consideradas atômicas e o papel das partículas *todo* e *existe* na formação e avaliação de sentenças.

2.2 Quantificação

Estudaremos agora, de forma intuitiva, a formação e a avaliação de sentenças por meio das partículas *todo* e *existe*. Estas particulas, em conjunto com os conectivos, são as partículas mais utilizadas na linguagem matemática.

Definição 2.8 *As partículas* todo *e* existe *são chamadas* quantificadores.

2.2.1 Quantificação em Domínios Finitos

Inicialmente, vamos analisar a relação existente entre os quantificadores e os conectivos *e* e *ou*.

Exemplo 3 *Considere uma sala na qual estão quatro pessoas:* Maria*,* José*,* Pedro *e* Paulo*.*

Maria	Pedro
José	Paulo

Sala 1

A sentença todos nesta sala são homens *é falsa, assim como é falsa a primeira das sentenças:*

Maria é homem,
Pedro é homem,
José é homem,
Paulo é homem,

enquanto que as outras três são verdadeiras.

Logo, a sentença todos nesta sala são homens *é falsa, assim como é falsa a conjunção* (Maria é homem) $\wedge$ (Pedro é homem) $\wedge$ (José é homem) $\wedge$ (Paulo é homem)*, que expressa o mesmo conteúdo que a sentença onde ocorre o* todos*.*

Exemplo 4 *Considere agora uma sala em que estão quatro pessoas:* João*,* José*,* Pedro *e* Paulo*.*

João	Pedro
José	Paulo

Sala 2

Neste contexto, a sentença todos nesta sala são homens *é verdadeira, assim como também são verdadeiras as sentenças:*

João é homem,
Pedro é homem,
José é homem,
Paulo é homem.

Logo, a sentença todos nesta sala são homens *é verdadeira, assim como a conjunção* (João é homem) $\wedge$ (Pedro é homem) $\wedge$ (José é homem) $\wedge$ (Paulo é homem)*, que expressa o mesmo conteúdo que a sentença onde ocorre o* todos*.*

Generalizando os exemplos apresentados acima, dado um domínio com m objetos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, e uma propriedade P sobre estes objetos, podemos concluir que a sentença todos os elementos do domínio possuem a propriedade P é verdadeira quando cada uma das m sentenças:

a_1 possui a propriedade P,
a_2 possui a propriedade P,
...
a_m possui a propriedade P,

é verdadeira. Ou seja, quando a conjunção (a_1 possui a propriedade P) $\wedge$ (a_2 possui a propriedade P) $\wedge$ ... $\wedge$ (a_m possui a propriedade P) é verdadeira. E a mesma sentença é falsa quando ao menos uma das sentenças:

a_1 possui a propriedade P,
a_2 possui a propriedade P,
...
a_m possui a propriedade P,

é falsa. Ou seja quando a conjunção (a_1 possui a propriedade P) $\wedge$ (a_2 possui a propriedade P) $\wedge$ ... $\wedge$ (a_m possui a propriedade P) é falsa.

Assim, podemos considerar que, em domínios finitos, o *todo* é equivalente a um *e* generalizado.

Exemplo 5 *Considere agora a mesma Sala 1 do Exemplo 3 e a sentença* nesta sala existe uma mulher. *Esta sentença é verdadeira. E também é verdadeira a primeira das sentenças*

Maria é mulher,
Pedro é mulher,
José é mulher,
Paulo é mulher,

enquanto que as outras três são falsas.

Logo, a sentença nesta sala existe uma mulher *é verdadeira, assim como é verdadeira a disjunção* (Maria é mulher) $\vee$ (Pedro é mulher) $\vee$ (José é mulher) $\vee$ (Paulo é mulher), *que expressa o mesmo conteúdo que a sentença onde ocorre o* existe.

Exemplo 6 *Considere agora a Sala 2 do Exemplo 4. Neste contexto, a sentença* nesta sala existe uma mulher *é falsa, assim como também são falsas todas as sentenças:*

João é mulher,
Pedro é mulher,
José é mulher,
Paulo é mulher.

Logo, a sentença nesta sala existe uma mulher *é falsa, assim como é falsa a disjunção* (João é mulher) $\vee$ (Pedro é mulher) $\vee$ (José é mulher) $\vee$ (Paulo é mulher) *que expressa o mesmo conteúdo que a sentença onde ocorre o* existe.

Generalizando os exemplos apresentados acima, dado um domínio com m objetos $a_1, a_2, \ldots, a_m$, e uma propriedade P sobre estes objetos, podemos concluir que a sentença existe ao menos um elemento do domínio que possui a propriedade P é verdadeira quando ao menos uma das sentenças:

$$a_1 \text{ possui a propriedade } P,$$
$$a_2 \text{ possui a propriedade } P,$$
$$\ldots$$
$$a_m \text{ possui a propriedade } P,$$

é verdadeira. Ou seja, quando a disjunção (a_1 possui a propriedade P) $\vee$ (a_2 possui a propriedade P) $\vee$ ... $\vee$ (a_m possui a propriedade P) é verdadeira. E a mesma sentença é falsa quando todas as sentenças:

$$a_1 \text{ possui a propriedade } P,$$
$$a_2 \text{ possui a propriedade } P,$$
$$\ldots$$
$$a_m \text{ possui a propriedade } P,$$

são falsas. Ou seja, quando a disjunção (a_1 possui a propriedade P) $\vee$ (a_2 possui a propriedade P) $\vee$ ... $\vee$ (a_m possui a propriedade P) é falsa.

Assim, podemos considerar que, em domínios finitos, o *existe* é equivalente a um *ou* generalizado.

2.2.2 Quantificação em Domínios Infinitos

Se trabalhássemos somente com domínios finitos, poderíamos abolir o uso dos quantificadores e ficar somente com os conectivos, escrevendo conjunções e disjunções generalizadas no lugar de sentenças onde ocorrem o *todo* e o *existe*. Mas, como em Matemática, mesmo nos estudos mais elementares, domínios infinitos são considerados, devemos levar adiante a análise da formação e avaliação de sentenças por meio dos quantificadores. Vejamos agora o que acontece em domínios infinitos.

Exemplo 7 *Considere o conjunto* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, \ldots\}$ *dos números naturais. A sentença* todos os elementos de $\mathbb{N}$ são maiores que 0 *é falsa, assim como é falsa a primeira das sentenças:*

$$0 \text{ é maior que } 0,$$
$$1 \text{ é maior que } 0,$$
$$2 \text{ é maior que } 0,$$
$$\ldots$$

enquanto que todas as outras são verdadeiras.

Logo, a sentença todos os elementos de $\mathbb{N}$ são maiores que 0 *é falsa, assim como seria falsa a "conjunção infinita"* (0 é maior que 0) $\wedge$ (1 é maior que 0) $\wedge$ (2 é maior que 0) $\wedge$ $\ldots$*, que expressaria o mesmo conteúdo que a sentença onde ocorre o* todos*, se pudesse ser escrita.*

Exemplo 8 *Considere o mesmo conjunto* $\mathbb{N}$ *e a sentença* todos os elementos de $\mathbb{N}$ são inteiros. *Esta sentença é verdadeira, assim como são verdadeiras todas as sentenças:*

0 é um inteiro,
1 é um inteiro,
2 é um inteiro,
...

Logo, a sentença todos os elementos de $\mathbb{N}$ são inteiros *é verdadeira, assim como seria verdadeira a "conjunção infinita"* (0 é inteiro) $\wedge$ (1 é inteiro) $\wedge$ (2 é inteiro) $\wedge$ ..., *que expressaria o mesmo conteúdo que a sentença onde ocorre o* todos, *se pudesse ser escrita.*

Assim, podemos considerar que, em domínios infinitos, o *todo* é equivalente, em termos de conteúdo, a uma "conjunção infinita", embora uma tal conjunção não possa ser escrita.

Exemplo 9 *Considere agora o mesmo conjunto* $\mathbb{N}$ *e a sentença* existe um elemento em $\mathbb{N}$ que é par e primo. *Esta sentença é verdadeira, assim como é verdadeira a terceira das sentenças:*

0 é par e primo,
1 é par e primo,
2 é par e primo,
...

enquanto que todas as outras são falsas.

Logo, a sentença existe um elemento em $\mathbb{N}$ que é par e primo *é verdadeira, assim como seria verdadeira a "disjunção infinita"* (0 é par e primo) $\vee$ (1 é par e primo) $\vee$ (2 é par e primo) $\vee$ ..., *que expressaria o mesmo conteúdo que a sentença onde ocorre o* existe, *se pudesse ser escrita.*

Exemplo 10 *Considere ainda o conjunto* $\mathbb{N}$ *e a sentença* existe um elemento em $\mathbb{N}$ que é irracional. *Esta sentença é falsa, assim como são falsas todas as sentenças:*

0 é irracional,
1 é irracional,
2 é irracional,
...

Logo, a sentença existe um elemento em $\mathbb{N}$ que é irracional *é falsa, assim como seria falsa a "disjunção infinita"* (0 é irracional) $\vee$ (1 é irracional) $\vee$ (2 é irracional) $\vee$ ..., *que expressaria o mesmo conteúdo da sentença onde ocorre o* existe, *se pudesse ser escrita.*

Assim, podemos considerar que, em domínios infinitos, o *existe* é equivalente, em termos de conteúdo, a uma "disjunção infinita", embora uma tal disjunção não possa ser escrita.

Em resumo, temos as seguintes conclusões:

1. Em termos de conteúdo, o *todo* é equivalente a um $\wedge$ generalizado e o *existe* é equivalente a um $\vee$ generalizado.

2. Mas, em termos de reescrita, não existe uma associação direta entre os conectivos $\wedge$ e $\vee$ e os quantificadores *todo* e *existe*, pois, nos casos dos domínios infinitos, não poderíamos escrever, de maneira direta, o quantificador *todo* como um $\wedge$ e nem o quantificador *existe* como um $\vee$.

2.3 Sintaxe

2.3.1 Formas Sentenciais

Embora, em termos de conteúdo, o *todo* seja equivalente a um $\wedge$ generalizado e o *existe* seja equivalente a um $\vee$ generalizado, em termos da reescrita das sentenças onde estes quantificadores ocorrem, eles não podem ser assim considerados. Isto acontece por que, no caso dos domínios infinitos, uma sentença onde o *todo* ocorre não pode ser escrita de maneira direta como uma conjunção e uma sentença onde o *existe* ocorre não pode ser escrita de maneira direta como uma disjunção. Assim, temos que encontrar um mecanismo que nos permita escrever em uma expressão finita tanto a conjunção como a disjunção das sentenças:

$$
\begin{array}{c}
a_1 \text{ possui a propriedade P} \\
a_2 \text{ possui a propriedade P} \\
\dots \\
a_n \text{ possui a propriedade P} \\
\dots
\end{array}
$$

A idéia é fazer o seguinte:

1. Dado um domínio D e uma propridade P sobre elementos de D, consideramos o conjunto das sentenças da forma a_i possui a propriedade P, onde os a_i's denotam os elementos de D.

2. Se D for finito, podemos considerar que a sentença para todo elemento de D vale a propriedade P é equivalente à conjunção (a_1 possui a propriedade P) $\wedge$ (a_2 possui a propriedade P) $\wedge \ \dots \ \wedge$ (a_m possui a propriedade P). Analogamente, neste caso, podemos considerar que a sentença existe ao menos um elemento de D para o qual vale

a propriedade P é equivalente à disjunção (a_1 possui a propriedade P) $\vee$ (a_2 possui a propriedade P) $\vee$ ... $\vee$ (a_m possui a propriedade P).

Este é exatamente o significado dos quantificadores, quando associados a domínios finitos.

3. Mas se D for infinito o procedimento acima não poderá ser executado, pois não podemos escrever nem conjunções nem disjunções infinitas. Neste caso, fazemos o seguinte:

   a. Consideramos as "sentenças individuais":

   $$a_1 \text{ possui a propriedade } P$$
   $$a_2 \text{ possui a propriedade } P$$
   $$\ldots$$
   $$a_m \text{ possui a propriedade } P$$
   $$\ldots$$

   b. Introduzimos uma nova letra, por exemplo x, que pode ser usada para denotar qualquer elemento do domínio infinito.

   c. Utilizando a letra x, representamos a forma geral das "sentenças individuais" por uma única expressão:

   $$x \text{ possui a propriedade } P,$$

   chamada a *forma sentencial*.

   d. Associamos a cada quantificador um símbolo, conforme a seguinte tabela:

Quantificador	Símbolo
para todo	$\forall$
existe ao menos um	$\exists$

   e. Escrevemos:

   $$\forall x\ (x \text{ possui a propriedade } P),$$

   se queremos afirmar que a propriedade P vale para todos os elementos do domínio. E escrevemos:

   $$\exists x\ (x \text{ possui a propriedade } P),$$

   se queremos afirmar que existe ao menos um dos elementos do domínio que satisfaz a propriedade.

Exemplo 11 *Considere o conjunto* $\mathbb{N}$ *dos números naturais. Cada elemento de* $\mathbb{N}$ *possui um nome, que é um dos* numerais*:* zero*,* um*,* dois*,* três*,* quatro*, ... Assim, se queremos afirmar que todos os elementos de* $\mathbb{N}$ *são positivos, ao invés de escrevermos infinitas sentenças:*

zero é positivo
um é positivo
dois é positivo
...

tomamos uma nova letra x *que pode assumir como valor qualquer número natural e escrevemos uma única expressão que possui a forma das sentenças anteriores:*

x é positivo

A partir daí, podemos escrever $\forall x$ (x é positivo)*, afirmando que* todos os elementos de $\mathbb{N}$ são positivos*. Por outro lado, se queremos afirmar que* existe uma elemento de $\mathbb{N}$ que é positivo*, escrevemos* $\exists x$ (x é positivo)*.*

2.3.2 Constantes e Variáveis

Duas categorias de símbolos ocupam lugar de destaque no procedimento de formação esboçado na Seção 2.3.1:

1. Símbolos como os numerais *zero*, *um*, *dois*, *três*, ... que denotam elementos específicos de um domínio.

2. Símbolos como a letra x que podem denotar um elemento qualquer de um domínio.

Definição 2.9 *i) Uma* constante *é uma expressão de uma dada linguagem que denota um elemento específico em um dado contexto.*

ii) Uma variável *é uma expressão de uma dada linguagem que pode denotar um elemento qualquer em um dado contexto.*

Exemplo 12 *Alguns exemplos de constantes utilizadas na Matemática são:*

a) Os numerais: cinco, cinquenta, quinhentos, cinco mil.

b) O nome do conjunto dos números naturais: $\mathbb{N}$.

Alguns exemplos de variáveis utilizadas na Matemática são:

c) Variáveis para números naturais: m, n, p.

d) Variáveis para conjuntos de números naturais: A, B, C.

Observe que, enquanto cinco *é o nome de um número natural específico,* m *pode denotar qualquer um dos números* $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ *Do mesmo modo, enquanto* $\mathbb{N}$ *denota um conjunto específico,* A *pode denotar qualquer um dos conjuntos* $\emptyset$, $\{0, 1\}$, $\{1, 3, 5, 7, \}$, $\{2, 4, 6, 8, \ldots\}$, $\mathbb{N}$, *etc.*

Constantes denotam elementos específicos em um dado contexto. Mas, em contextos diferentes, uma mesma constante pode denotar elementos diferentes.

Exemplo 13 *Alguns autores utilizam a expressão* 1, *que usualmente denota um determinado número natural, para denotar também a matriz identidade:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando as noções de constante, variável e forma sentencial, podemos descrever o processo de formação de sentenças onde ocorrem os quantificadores.

Dada uma sentença:

$$a \text{ possui a propriedade } P$$

onde a é uma constante, *substituímos* a pela variável x obtendo a forma sentencial:

$$x \text{ possui a propriedade } P$$

A seguir, *quantificando* a variável x, temos as sentenças:

$$\forall x \; (x \text{ possui a propriedade } P)$$
$$\exists x \; (x \text{ possui a propriedade } P)$$

Analogamente, se temos as sentenças:

$$\forall x \; (x \text{ possui a propriedade } P)$$
$$\exists x \; (x \text{ possui a propriedade } P)$$

eliminado os quantificadores $\forall$ e $\exists$, temos a forma sentencial:

$$x \text{ possui a propriedade } P$$

A seguir, *substituindo* a variável x pela constante a, temos a sentença:

$$a \text{ possui a propriedade } P$$

Em resumo, temos o seguinte diagrama, que mostra como podemos passar de sentenças para formas sentenciais e vice-versa, por meio dos processos de substituição, quantificação e eliminação:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & a \ \textsf{possui a propriedade } P & & \\
\text{SUBSTITUIÇÃO} & \uparrow & & \downarrow & \text{SUBSTITUIÇÃO} \\
 & & x \ \textsf{possui a propriedade } P & & \\
\text{ELIMINAÇÃO} & \uparrow & & \downarrow & \text{QUANTIFICAÇÃO} \\
 & & \forall x \ (x \ \textsf{possui a propriedade } P) & & \\
 & & \exists x \ (x \ \textsf{possui a propriedade } P) & &
\end{array}
$$

O diagrama acima ilustra três fatos importantes sobre a formação de sentenças onde ocorrem os quantificadores *para todo* e *existe ao menos um*:

1. A forma sentencial x possui a propriedade P é considerada como uma componente das sentenças $\forall x$ (x possui a propriedade P) e $\exists x$ (x possui a propriedade P).

2. A partir da forma sentencial x possui a propriedade P podemos formar sentenças de duas maneiras distintas:

   a) Através da substituição de variáveis por constates.

   b) Através da quantificação de variáveis.

3. As sentenças $\forall x$ (x possui a propriedade P) e $\exists x$ (x possui a propriedade P) são obtidas a partir de sentenças a possui a propriedade P através da substituição de constantes por variáveis e da quantificação de variáveis.

2.3.3 Forma dos Enunciados Atômicos

Sentenças e formas sentenciais receberão uma denominação especial.

Definição 2.10 *Um* enunciado *é uma expressão de uma dada linguagem, que pode ser utilizada como uma sentença ou como uma forma sentencial.*

Quanto à formação, os enunciados podem ser classificados em duas categorias.

Definição 2.11 *Um enunciado é* atômico *se não possui a ocorrência de conectivos ou quantificadores.*

Na Lógica Monádica, temos o seguinte princípio sobre a forma dos enunciados atômicos:

Todo enunciado atômico é da forma Sujeito-Predicado.

Ou seja, um enunciado atômico expressa a *predicação* de uma *propriedade* a um elemento de um determinado domínio.

Exemplo 14 *a)* 2 é par.

Sujeito: 2

Predicado: ser par

b) 3 é maior do que 5

Sujeito: 3

Predicado: ser maior do que 5

c) A está entre B e C.

Sujeito: A

Predicado: estar entre B e C

d) Maria vai à feira com João.

Sujeito: Maria

Predicado: ir à feira com João

e) Maria e João são casados.

Sujeito: Maria e João *(sujeito composto)*

Predicado: serem casados

Para sistematizar a reescrita de enunciados atômicos, devemos examinar um pouco melhor o conceito de propriedade.

2.3.4 Propriedades e Símbolos de Predicado

Uma *propriedade* descreve um estado de coisas, dizendo se um determinado elemento possui, ou não, uma característica.

Exemplo 15 *Vejamos dois exemplos de propriedades.*

a) A propriedade ser par *diz que certos números naturais são múltiplos de* 2.

b) A propriedade ser primo *diz que certos números naturais não possuem divisores diferentes de* 1 *e de si próprios.*

Para evitar ambigüidade na reescrita de enunciados atômicos, vamos exigir que uma propriedade satisfaça às seguintes condições:

1. Existe um domínio que contém todos os elementos sobre os quais faz sentido perguntar se possuem a propriedade.

2. Dado um elemento do domínio no qual a propriedade está definida, uma e somente uma das alternativas acontece: ou ele possui a propriedade ou ele não possui a propriedade.

Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 2.12 *i) Uma* propriedade P *em um domínio* D *é um subconjunto de* D.

ii) Dado a *um elemento qualquer de* D, *dizemos que* a *possui ou não a propriedade* P *caso* a *seja, ou não, um elemento de* P.

Exemplo 16 *A propriedade* ser par *é o conjunto* $\{0, 2, 4, \ldots\}$ *dos números pares.*

Definição 2.13 *Um* símbolo de predicado *é uma expressão de uma dada linguagem, que pode ser utilizada para denotar uma propriedade.*

Para reescrever enunciados atômicos, devemos reescrever as expressões que denotam propriedades e sujeitos.

2.3.5 Reescrita de Símbolos de Predicado

Temos a seguinte regra para a reescrita de símbolos de predicado.

REGRA Um símbolo de predicado deve ser reescrito como $\alpha(x)$, onde α é uma seqüência de letras maiúsculas e x é uma variável.

Usualmente, a seqüência de letras maiúsculas utilizada na reescrita de símbolos de predicado é uma expressão que induz o significado da propriedade que ele denota.

Exemplo 17 *Para os símbolos de predicado do Exemplo 14, temos:*

a) PAR (x)

b) MAIOR-QUE-5 (x)

c) ENTRE-B-E-C (x)

d) VAI-À-FEIRA-COM-JOÃO (x)

e) CASADOS (x)

Exemplo 18 *Vamos agora reescrever os enunciados do Exemplo 14.*

a) 2 é par.

PAR (2)

Falta reescrever o sujeito 2.

b) 3 é maior do que 5.

MAIOR-QUE-5 (3)

Falta reescrever o sujeito 3.

c) A está entre B e C.

ENTRE-B-E-C (A)

Falta reescrever o sujeito A.

d) Maria vai à feira com João.

VAI-À-FEIRA-COM-JOÃO (Maria)

Falta reescrever o sujeito Maria.

e) Maria e João são casados.

CASADOS (João e Maria)

Falta reescrever o sujeito João e Maria.

f) Paulo e Cybele são estudiosos.

ESTUDIOSO (Paulo) $\wedge$ ESTUDIOSO(Cybele)

Falta reescrever os sujeitos Paulo *e* Cybele.

g) A mãe de Marcelo é professora.

PROFESSORA (mãe de Marcelo)

Falta reescrever o sujeito mãe de Marcelo.

h) O carro de Marcelo é azul.

AZUL (carro de Marcelo)

Falta reescrever o sujeito carro de Marcelo.

i) Ele é professor.

PROFESSOR (Ele)

Falta reescrever o sujeito ele.

Devemos agora reescrever os sujeitos.

2.3.6 Termos

Expressões que são utilizadas como sujeitos receberão uma denominação especial.

Definição 2.14 *Um* termo *é uma expressão de uma dada linguagem, que pode ser utilizada para denotar um objeto de um dado domínio.*

Exemplo 19 *São exemplos de termos:*

a) *Algumas constantes utilizadas em Matemática:*

Constante	*Denotação*
0	zero
1	um
e	base dos logaritmos neperianos
$\emptyset$	conjunto vazio
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais

b) *Algumas variáveis usadas em Matemática:*

Variável	*Denotação usual*
n	um número natural
x	um número qualquer
P	um ponto
r	uma reta
α	um plano

c) *Alguns nomes como:*

Bar Luiz, Rua da Carioca, Rio de Janeiro, Brasil, Terra *e* Via Láctea.

d) *Alguns pronomes como:*

ele, ela, aquele, aquela, *etc.*

e) *Termos mais complicados como:*

$-1,\ 1+1,\ 2\pi^r,\ \log_2^x,\ \dfrac{7+\sqrt{5}}{x!},\ \displaystyle\int_0^1 f(x)dx,\ \{0,1,2,3,4\},\ etc.$

Quanto à formação, os termos podem ser atômicos ou moleculares.

Definição 2.15 *Um termo é* atômico *se é uma constante ou uma variável.*

Na Lógica Monádica, todos os termos serão classificados como atômicos.

2.3.7 Reescrita e Simbolização de Termos

Temos as seguintes regras para a reescrita de termos na Lógica Monádica:

REGRA 1 Um termo atômico não deve ser reescrito.

O processo de simbolização de termos é efetuado nos seguintes passos:

PASSO 1) Classificar o termo como variável ou constante.

PASSO 2) Simbolizar os termos de acordo com as seguintes regras:

5a. Uma constante deve ser simbolizada por uma das letras: a, b, c, d ou e (indexadas ou não).

5b. Uma variável deve ser simbolizada por uma das letras: x, y, z, u, v ou w (indexadas ou não).

Exemplo 20 *Vejamos alguns exemplos de reescrita de termos.*

a) João

a

b) 2

b

c) x

x

d) Ele

y

e) O pai de João

c

f) O pai dele

z

g) -3

d

h) $2 + 3$

e

i) $2! + 3$

a_1

j) $(2+3)!$

b_1

k) $x+yz$

w

l) $(x+y)z$

x_1

m) $x^{\log_3 2}$

y_2

2.3.8 Simbolização de Enunciados

Os enunciados atômicos são aqueles que não podem ser formados a partir de enunciados anteriores. Como já vimos no parágrafo 2.3.3, os enunciados atômicos são formados a partir de termos por aplicação de símbolos de predicado e, portanto, são da forma:

$$P(t)$$

Exemplo 21 *Vejamos alguns exemplos de reescrita de enunciados atômicos.*

a) Marcelo é professor.

PROFESSOR(Marcelo)

b) x é um número perfeito.

NÚMERO-PERFEITO(x)

c) João é marido de Ana.

MARIDO-DE-ANA(João)

d) Maria é mãe de Isabel e de Ana.

MÃE-DE-ISABEL-E-ANA(Maria)

Definição 2.16 *Um enunciado é* molecular *se não é atômico, isto é, se nela ocorre pelo menos um conectivo ou quantificador.*

Temos as seguintes regras para a reescrita de enunciados moleculares:

REGRA 1 As regras para negação, conjunção, disjunção, implicação e biimplicação são análogas às do CS.

REGRA 2 Uma generalização deve ser reescrita como $\forall x\alpha$, onde α é o enunciado generalizado previamente reescrito.

REGRA 3 Uma existencialização deve ser reescrita como $\exists x\alpha$, onde α é o enunciado existencializado previamente reescrito.

Exemplo 22 *Vejamos alguns exemplos de reescrita de enunciados moleculares.*

a) x não é um número perfeito.

$\neg$(NÚMERO-PERFEITO(x))

b) 2 é par e x é impar.

PAR(2) $\wedge$ ÍMPAR(x)

c) Se x é primo diferente de 2, então x é ímpar.

PRIMO(x) $\wedge$ DIFERENTE-DE-2(x) $\rightarrow$ ÍMPAR(x)

d) Se a é par e b é ímpar, entao a e b são primos entre si.

PAR(a) $\wedge$ ÍMPAR(b) $\rightarrow$ PRIMOS-ENTRE-SI($a \& b$)

e) Todos os números são pares.

$\forall x$(NÚMERO(x) $\rightarrow$ PAR(x))

f) Existem números pares.

$\exists x$(NÚMERO(x) $\wedge$ PAR(x))

O processo de simbolização de enunciados é efetuado nos seguntes passos:

PASSO 1) Classificar o enunciado em atômico ou molecular.

PASSO 2) Se for atômico, identificar *sujeito* e a *propriedade.*

2a. Reescrever o enunciado de acordo com as regras de reescrita.

2b. Substituir os termos por termos simbolizados e os símbolos de predicado por uma das letras P, Q, R, S ou T (indexada ou não), de modo que cada ocorrência de um mesmo símbolo de predicado seja substituindo pela mesma letra.

PASSO 3) Se o enunciado for molecular, classificar todos os conectivos e quantificadores que ocorrem nele e determinar se é negação, conjunção, disjunção, implicação, biimplicação, generalização ou existencialização.

3a. Reescrever o enunciado de acordo com as regras de reescrita.

3b. Simbolizar o enunciado reescrito, substituindo os termos reescritos por termos simbolizados, os símbolos de predicado pelas letras P, Q, R, S ou T (indexadas ou não), de modo que cada ocorrência de um mesmo símbolo de predicado seja substituído pela mesma letra.

Exemplo 23 *Para os enunciados do Exemplo 21, temos:*

a) $P(a)$

b) $Q(x)$

c) $R(b)$

d) $S(c)$

Exemplo 24 *Para os enunciados do Exemplo 22, temos:*

a) $P(a)$

b) $P(a) \wedge Q(x)$

c) $P(x) \wedge Q(x) \rightarrow R(x)$

d) $P(a) \wedge Q(b) \rightarrow S(c)$

e) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

f) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$

Capítulo 3

Árvores de Refutação

3.1 Ineficiência das tabelas de verdade

Muitas vezes, devido à grande quantidade de trabalho manual que teríamos de executar, seríamos desencorajados a usar o método das tabelas de verdade na verificação da validade de argumentos.

Exemplo 1 *Verificar a validade do seguinte argumento:*

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ q \to \neg s \\ \neg t \to s \\ \hline q \to (p \to t) \end{array}$$

Usando a tabela de verdade teríamos um total de $2^5 = 32$ *linhas e aproximadamente* 13 *colunas (o que fornece um total de* 416 *entradas de* V *e* F*).*

O Exemplo 1 nos ajuda a comprovar que o método das tabelas de verdade não é adequado para um ser humano, uma vez que, para verificar a validade de argumentos relativamente pequenos, necessitamos de um número muito grande de linhas e colunas.

O leitor já familiarizado com a programação de computadores deve ter percebido que é fácil fazer um programa de computador que implemente o método das tabelas de verdade. Assim, parece que, se tivermos uma quantidade suficiente de tecnologia à nossa disposição, o uso das tabelas de verdade não apresentará nenhum problema. Mas pode-se provar que, mesmo para computadores que processam uma grande quantidade de informação por segundo, do ponto de vista computacional, usar o método das tabelas de verdade para verificar a validade de certos argumentos pode ser extremamente custoso.

Na verdade, descobrir um método para verificar a validade de argumentos que seja eficiente, do ponto de vista computacional, ou provar que este método não existe, é o principal problema não resolvido em um ramo da Matemática chamado *Teoria da Computação*.

Nas próximas seções, apresentaremos um método que, em alguns casos, possui um desempenho melhor que a tabela de verdade, na verificação da validade de argumentos. Cabe observar que este melhor desembpenho não se dá em uma quantidade significativa de casos. Por isso o novo método não pode ser considerado como uma alternativa para o método das tabelas de verdade.

3.2 O método de redução ao absurdo

O método que iremos apresentar, chamado *método de refutação*, é um caso particular do *método de redução ao absurdo.* Este último pode ser descrito sucintamente do seguinte modo:

1) Temos um determinado enunciado β que queremos provar, a partir de enunciados $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$:

$$\boxed{\alpha_1, \ldots, \alpha_n} \Longrightarrow \beta$$

2) Ao invés de tentarmos combinar a informação contida em $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ de modo a justificar β diretamente, acrescentamos a $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ o enunciado $\neg\beta$, ou seja, a negação do que queremos provar:

$$\boxed{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta}$$

3) Consideramos que, quando podemos provar β a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, a verdade de β está assegurada pela verdade de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Logo, se podemos provar β a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, de algum modo a informação contida em $\neg\beta$ deve entrar em conflito com a informação contida em $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Assim, raciocinamos sobre $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta$ tentando encontrar alguma informação $\neg\gamma$ que contradiga alguma informação γ, já obtida anteriormente:

$$\boxed{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta} \Longrightarrow \neg\gamma, \gamma$$

4) Se isto acontecer, então consideramos que β está provado a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

O método de redução ao absurdo possui as seguintes características:

a) Tenta resolver o problema P_1 de provar β a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ transformando P_1 no problema P_2 de provar uma contradição a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta$.

b) P_2 pode ser mais fácil que P_1. De fato, em P_2 temos mais informações (premissas) para manipular. E, como qualquer contradição a que chegarmos manipulando $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \neg\beta$ nos mostra que a informação contida em $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ nos leva a β, em P_2 temos mais conclusões para onde guiar nossos esforços.

c) P_2 pode ser mais difícil que P_1.

3.3 O método de refutação

O método de refutação pode ser descrito do seguinte modo:

1) Queremos provar que uma sentença simbolizada α é uma tautologia. As informações que podemos usar para isto são as fornecidas pelas regras de formação e avaliação de sentenças:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Regras de formação}\\ +\\ \text{Regras de avaliação}\end{array}} \Longrightarrow\ \models \alpha$$

2) Acrescentamos a informação dada nas regras de formação e avaliação a negação do que queremos provar, ou seja, que α não é uma tautologia:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Regras de formação}\\ +\\ \text{Regras de avaliação}\\ +\\ \not\models \alpha\end{array}}$$

3) Pela definição, temos que $\models \alpha$ se, e somente se, para toda interpretação I para α, temos que α é V em I. Daí, $\not\models \alpha$ se, e somente se, existe uma interpretação I para α, tal que α é F em I.

   De acordo com o método de redução ao absurdo, se $\models \alpha$, a informação contida nas regras de formação e avaliação de sentenças deve entrar em conflito com a existência de uma interpretação I tal que α é F em I. Este conflito deve será expresso na existência de uma letra sentencial p_i que deve ser ao mesmo tempo V e F em I.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Regras de formação}\\ +\\ \text{Regras de avaliação}\\ +\\ \alpha \text{ é } F \text{ em } I\end{array}} \Longrightarrow p_i \text{ é } V \text{ e } F \text{ em } I$$

4) Se isto acontecer, então $\models \alpha$.

Em resumo, temos:

MÉTODO DE REFUTAÇÃO

Objetivo: Dada uma sentença simbolizada α do CS, determinar se $\models \alpha$.

Método: Consiste dos seguintes passos:

PASSO 1) Suponha que existe uma interpretação I para α tal que α é F em I, ou seja, α não é uma tautologia.

PASSO 2) Usando a informação contida nas regras de avaliação (sobre a relação entre os valores de verdade de uma sentença simbolizada e o valor de verdade de suas componenetes), calcule o valor de verdade de cada letra sentencial de α na interpretação I.

PASSO 3) Se existir uma letra sentencial de α que é, ao mesmo tempo, V e F em I, então $\models \alpha$. Se não, α não é uma tautologia.

Exemplo 2 *Vamos usar o método de refutação para provar que algumas sentenças simbolizadas são tautologias.*

a) $\models p \rightarrow p$

Prova: *Suponhamos que* $\not\models p \rightarrow p$*, ou seja, que existe uma interpretação* I *para* $p \rightarrow p$ *tal que* $p \rightarrow p$ *é* F *em* I*. De acordo com a tabela de verdade do* $\rightarrow$*, para que uma implicação seja* F *em uma dada interpretação* I*, sua antecedente deve ser* V *em* I *e sua consequente deve ser* F *em* I*. Assim, como supomos que* $p \rightarrow p$ *é* F *em* I*, podemos concluir que* p *(o antecedente) é* V *em* I *e que* p *(o consequente) é* F *em* I*, contradizendo a definição de interpretação. Assim,* $\models p \rightarrow p$*.* ∎

b) $\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$

Prova: *Suponhamos que* $\not\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$*, ou seja, que existe uma interpretação* I *para* $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ *tal que* $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ *é* F *em* I*. De acordo com a tabela de verdade do* $\rightarrow$*, como supomos que* $p \rightarrow (q \rightarrow p)$ *é* F *em* I*, podemos concluir que* p *(o antecedente) é* V *em* I *e que* $q \rightarrow p$ *(o consequente) é* F *em* I*. Aplicando novamente a tabela de verdade do* $\rightarrow$*, do fato de que* $q \rightarrow p$ *é* F *em* I*, concluímos que* q *é* V *em* I *e que* p *é* F *em* I*, contradizendo a definição de interpretação. Assim,* $\models p \rightarrow (q \rightarrow p)$*.* ∎

3.4 Árvores de refutação

Exemplo 3 *Verificar se as seguintes sentenças simbolizadas são tautologias, usando árvores de refutação.*

a) $\models (p \to q) \wedge (q \to p) \to (p \leftrightarrow q)$

Exemplo 4 *Verificar a validade dos seguintes argumentos, usando árvores de refutação.*

a) $$\begin{array}{l} p \wedge q \to r \\ q \to \neg s \\ \neg t \to s \\ \hline q \wedge p \to t \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} p \wedge q \to r \\ s \wedge r \to t \\ p \wedge s \\ \hline q \leftrightarrow t \end{array}$$

3.5 Regras de refutação do CS

As *árvores de refutação* do CS são formadas por aplicação sucessiva das seguintes *regras de refutação*.

Regra da negação

a) Como $\neg\alpha$ é V se, e somente se, α é F, quando temos $\neg\alpha : V$ em um ramo da árvore, marcamos $\neg\alpha : V$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \alpha : F \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\alpha : V \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \alpha : F \end{array}$$

b) Como $\neg\alpha$ é F se, e somente se, α é V, quando temos $\neg\alpha : F$ em um ramo da árvore, marcamos $\neg\alpha : F$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \alpha : V \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \neg\alpha : F \ \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \alpha : V \end{array}$$

Regra da conjunção

a) Como $\alpha \wedge \beta$ é V se, e somente se, α é V e β é V, quando temos $\alpha \wedge \beta : V$ em um ramo da árvore, marcamos $\alpha \wedge \beta : V$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \alpha : V \\ | \\ \beta : V \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \wedge \beta : V \ \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \alpha : V \\ | \\ \beta : V \end{array}$$

b) Como $\alpha \wedge \beta$ é F se, e somente se, α é F ou β é F, quando temos $\alpha \wedge \beta : F$ em um ramo da árvore, marcamos $\alpha \wedge \beta : F$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ \alpha : F & \beta : F \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \multicolumn{2}{c}{\alpha \wedge \beta : F \ \checkmark} \\ \multicolumn{2}{c}{\vdots} \\ \diagup & \diagdown \\ \alpha : F & \beta : F \end{array}$$

Regra da disjunção

a) Como $\alpha \vee \beta$ é V se, e somente se, α é V ou β é V, quando temos $\alpha \vee \beta : V$ em um ramo da árvore, marcamos $\alpha \vee \beta : V$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \diagup \;\; \diagdown & \\ \alpha : V & & \beta : V \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{ccc} & \vdots & \\ & \alpha \vee \beta : V \; \checkmark & \\ & \vdots & \\ & \diagup \;\; \diagdown & \\ \alpha : V & & \beta : V \end{array}$$

b) Como $\alpha \vee \beta$ é F se, e somente se, α é F e β é F, quando temos $\alpha \vee \beta : F$ em um ramo da árvore, marcamos $\alpha \vee \beta : F$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \alpha : F \\ | \\ \beta : F \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \vee \beta : F \; \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \alpha : F \\ | \\ \beta : F \end{array}$$

Regra da implicação

a) Como $\alpha \to \beta$ é V se, e somente se, α é F ou β é V, quando temos $\alpha \to \beta : V$ em um ramo da árvore, marcamos $\alpha \to \beta : V$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

Em resumo:

$$\begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ \alpha : F & \beta : V \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \to \beta : V \ \checkmark \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ \alpha : F & \beta : V \end{array} \end{array}$$

b) Como $\alpha \to \beta$ é F se, e somente se, α é V e β é F, quando temos $\alpha \to \beta : F$ em um ramo da árvore, marcamos $\alpha \to \beta : F$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ \alpha : V \\ | \\ \beta : F \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \alpha \to \beta : F \ \checkmark \\ \vdots \\ | \\ \alpha : V \\ | \\ \beta : F \end{array}$$

Regra da biimplicação

a) Como $\alpha \leftrightarrow \beta$ é V se, e somente se, α e β possuem o mesmo valor de verdade, quando temos $\alpha \leftrightarrow \beta : V$ em um ramo da árvore, marcamos $\alpha \leftrightarrow \beta : V$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{cc} \diagup & \diagdown \\ \alpha : V & \alpha : F \\ | & | \\ \beta : V & \beta : F \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \alpha \leftrightarrow \beta : V \ \surd \\ \vdots \\ \begin{array}{cc} & \wedge & \\ \alpha : V & & \alpha : F \\ | & & | \\ \beta : V & & \beta : F \end{array}\end{array}$$

b) Como $\alpha \leftrightarrow \beta$ é F se, e somente se, α e β possuem valores de verdade distintos, quando temos $\alpha \leftrightarrow \beta : F$ em um ramo da árvore, marcamos $\alpha \leftrightarrow \beta : F$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{ccc} & \wedge & \\ \alpha : V & & \alpha : F \\ | & & | \\ \beta : F & & \beta : V \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{c}\vdots\\ \alpha \leftrightarrow \beta : F \ \surd \\ \vdots \\ \begin{array}{ccc} & \wedge & \\ \alpha : V & & \alpha : F \\ | & & | \\ \beta : F & & \beta : V \end{array}\end{array}$$

Definição 3.1 *Seja A uma árvore e R um ramo de A.*

i) R é fechado *se existem nós a e b em R tais que a é $p : V$ e b é $p : F$, para alguma letra sentencial p.*

ii) R é aberto *se não é fechado.*

Método das Árvores de Refutação do CS

Objetivo: Dada uma sentença simbolizada α do CS, determinar se $\models \alpha$ ou não.

Método: Consiste dos seguintes passos:

Passo 1) Criar uma árvore com um único nó $\alpha : F$.

PASSO 2) Escolher na árvore um nó ainda não marcado como usado de um ramo ainda aberto e aplicar a este nó a regra de refutação correspondente.

PASSO 3) Examinar todos os ramos da árvore.

• Se todos os ramos estão fechados ou as únicas sentenças não marcadas como usadas são atômicas, então vá para o Passo 4.

• Se existe um ramo aberto, vá para Passo 2.

PASSO 4) Se todos os ramos estão fechados, conclua $\models \alpha$. Se existe um ramo aberto, conclua $\not\models \alpha$.

Este método pode ser aplicado na verificação da validade de argumentos do CS. De fato, dado um argumento:

$$\frac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{\beta}$$

sabemos que:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta \text{ se, e somente se, } \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$$

Assim, basta aplicar o método à sentença $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$. Se a sentença for uma tautologia, o argumento é válido. Se não, é inválido.

Teorema 3.1 (Smullyan, 1968) *Se α for uma sentença simbolizada do* CS*, as seguintes condições são equivalentes:*

a) $\models \alpha$

b) Existe uma árvore de refutação fechada para α.

3.6 Regras de refutação do CM

As *árvores de refutação* do CM são formadas por aplicação sucessiva das regras de refutação do CS acrescidas das seguintes regras.

REGRA DA QUANTIFICAÇÃO UNIVERSAL

a) Como $\forall x\alpha$ é V se, e somente se, todos os elementos do domínio possuem a propriedade expressa pelo enunciado α, quando temos $\forall x\alpha : V$ em um ramo da árvore, expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ (c/x)\alpha : V \end{array}$$

para cada constante c que já ocorre em alguma sentença no ramo. Quando o ramo não possui ocorrências de constantes em nenhum de suas sentenças, escolhemos uma constante c nova, isto é, que ainda não ocorre no ramo. Não marcamos $\forall x\alpha : V$ como usada pois, quando uma sentença com uma ocorrência de uma nova constante c' for acrescentada ao ramo pela aplicação de alguma regra de refutação, expandimos o ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ (c'/x)\alpha : V \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{cl} \vdots & \\ \forall x\alpha : V & \\ \vdots & \quad \textit{para toda constante c que já ocorre no ramo} \\ | & \\ (c/x)\alpha : V & \end{array}$$

b) Como $\forall x\alpha$ é F se, e somente se, algum elemento do domínio não possui a propriedade expressa pelo enunciado α, quando temos $\forall x\alpha : F$ em um ramo da árvore, marcamos $\forall x\alpha : F$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ (c/x)\alpha : F \end{array}$$

para uma constante c que ainda não ocorre nas sentenças do ramo.

Em resumo:

$$\begin{array}{cl} \vdots & \\ \forall x\alpha : F \quad \checkmark & \\ \vdots & \quad \textit{para uma constante c nova no ramo} \\ | & \\ (c/x)\alpha : F & \end{array}$$

Regra da quantificação existencial

a) Como $\exists x\alpha$ é V se, e somente se, algum elemento do domínio possui a propriedade expressa pelo enunciado α, quando temos $\exists x\alpha : V$ em um ramo da árvore, marcamos $\exists x\alpha : V$ como usada e expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ (c/x)\alpha : V \end{array}$$

para uma constante c que ainda não ocorre nas sentenças do ramo.

Em resumo:

$$\begin{array}{cl} \vdots & \\ \exists x\alpha : V \quad \checkmark & \\ \vdots & \textit{para uma constante } c \textit{ nova no ramo} \\ | & \\ (c/x)\alpha : V & \end{array}$$

b) Como $\exists x\alpha$ é F se, e somente se, nenhum elemento do domínio possui a propriedade expressa pelo enunciado α, quando temos $\exists x\alpha : F$ em um ramo da árvore, expandimos este ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ (c/x)\alpha : F \end{array}$$

para cada constante c que já ocorre em alguma sentença no ramo. Quando o ramo não possui ocorrências de constantes em nenhum de suas sentenças, escolhemos uma constante c nova, isto é, que ainda não ocorre no ramo. Não marcamos $\exists x\alpha : F$ como usada pois, quando uma sentença com uma ocorrência de uma nova constante c' for acrescentada ao ramo pela aplicação de alguma regra de refutação, expandimos o ramo acrescentando a todas as suas bifurcações o diagrama:

$$\begin{array}{c} | \\ (c'/x)\alpha : F \end{array}$$

Em resumo:

$$\begin{array}{cl} \vdots & \\ \exists x\alpha : F & \\ \vdots & \textit{para toda constante } c \textit{ que já ocorre no ramo} \\ | & \\ (c/x)\alpha : F & \end{array}$$

Definição 3.2 *Seja A uma árvore e R um ramo de A.*

i) R é fechado *se existem nós a e b em R tais que a é $\alpha : V$ e b é $\alpha : F$, para alguma sentença atômica α.*

ii) R é aberto *se não é fechado.*

Método das Árvores de Refutação do CM

Objetivo: Dada uma sentença simbolizada α do CM, determinar se $\models \alpha$.

Método: Consiste dos seguintes passos:

Passo 1) Criar uma árvore com um único nó $\alpha : F$.

Passo 2) Escolher na árvore um nó ainda não marcado como usado de um ramo ainda aberto e aplicar a este nó a regra de refutação correspondente.

Passo 3) Examinar todos os ramos da árvore.

- Se todos os ramos estão fechados ou as únicas sentenças não marcadas como usadas são atômicas ou quantificações universais V ou quantificações existenciais F para as quais a expansão com todas as constantes que ocorrem no ramo já foi feita, então vá para o Passo 4.
- Se existe um ramo aberto, vá para Passo 2.

Passo 4) Se todos os ramos estão fechados, conclua $\models \alpha$.

Este método pode ser aplicado na verificação da validade de argumentos do CM. De fato, dado um argumento:

$$\frac{\alpha_1 \cdots \alpha_n}{\beta}$$

sabemos que:

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta \text{ se, e somente se, } \models \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$$

Assim, basta aplicar o método à sentença $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$.

Teorema 3.2 (Smullyan, 1968) *Seja α uma sentença simbolizada do* CM*. Se existir uma árvore de refutação fechada para α, então $\models \alpha$.*

O método das árvores de refutação para o CM não é um método de decisão. Existem sentenças simbolizadas no CM que são válidas mas para as quais não é possível construir uma árvore de refutação fechada.

Capítulo 4

Lógica Quantificacional

4.1 O Cálculo Monádico, CM

Dado um domínio finito $D = \{a_1, \ldots, a_m\}$ e uma propriedade P sobre elementos de D, podemos expressar que todos os elementos de D possuem a propriedade P, usando a seguinte conjunção: (a_1 possui a propriedade P) $\wedge \ldots \wedge$ (a_m possui a propriedade P). Analogamente, podemos expressar que ao menos um dos elementos de D possui a propriedade P, usando a seguinte disjunção: (a_1 possui a propriedade P) $\vee \ldots \vee$ (a_m possui a propriedade P).

Os quantificadores abordados no CM são uma generalização do procedimento acima para o caso de domínios infinitos.

Dado um domínio infinito $D = \{a_1, \ldots, a_m, \ldots\}$ qualquer, não poderíamos expressar que todos os elementos de D possuem a propriedade P usando uma conjunção, já que esta seria infinita. Analogamente, não poderíamos expressar que ao menos um dos elementos de D possui a propriedade P usando uma disjunção. Assim, é necessário um outro mecanismo lingüístico para que sejamos capazes de lidar com a expressão de informações deste tipo.

Usualmente o que se faz é o seguinte:

1) Considera-se a forma comum de todos os componentes da conjunção (ou da disjunção) acima. Esta é o enunciado x possui a propriedade P, onde x pode assumir como valor cada um dos elementos de D.

2) Introduzimos uma notação para expressar a partir da forma acima os enunciados para todo x, x possui a propriedade P e existe ao menos um x tal que x possui a propriedade P. Estas notações são os quantificadores *para todo* e *existe ao menos um*.

O *Cálculo Monádico*, CM, é o estudo da *formação* e *avaliação* de sentenças, mediante o uso de conectivos por função de verdade e dos quantificadores *para todo* e *existe ao menos um*.

Sintaxe do CM

Os enunciados se dividem em *atômicos* ou *moleculares*. Os enunciados atômicos não possuem ocorrências de conectivos e/ou quantificadores. Os enunciados moleculares são formados a partir dos enunciados atômicos pelo uso de conectivos e/ou quantificadores.

No CM, admitimos apenas os conectivos *não, e, ou, se...então* e *se, e somente se* e os quantificadores *para todo* e *existe ao menos um*. Estes são os conectivos e quantificadores utilizados usualmente em contextos matemáticos.

Exemplo 1 *Em outras palavras, queremos que a linguagem do* CM *seja capaz de expressar enunciados como:*

a) 2 é par.

b) $sen(x) \leq 1$.

c) $x + 2$ é par.

d) $\emptyset \cup B$ é igual a $B - \emptyset$.

e) O ponto Q está entre os pontos P e R.

f) $x^2 \neq -1$.

g) x é par e $x^2 = 0$.

h) $x = 2$ ou $x = 3$.

i) Se todo número par é positivo, então 0 não é par.

j) O triângulo ABC é retângulo se, e somente se, $a^2 = b^2 + c^2$.

k) Para todo $x \in \mathbb{R}, -1 \leq x \leq 1$.

l) Existe $x \in \mathbb{C}$, tal que $x^2 = -1$.

Assim, ao repertório já disponível no alfabeto do CS, para formar o alfabeto do CM, devemos também considerar símbolos como:

a) *Constantes*, ou seja, símbolos como 2, $\emptyset$ e $\mathbb{R}$, utilizados para nomear objetos específicos do domínio de discurso.

b) *Variáveis*, ou seja, símbolos como x, y, z, X, Y e Z, utilizados para denotar objetos arbitrários do domínio de discurso.

c) *Símbolos de predicado*, ou seja, símbolos utilizados para denotar propriedades dos objetos do domínio de discurso.

d) E, obviamente, conectivos e quantificadores.

Temos, então os seguintes conceitos:

I. Um alfabeto

Definição 4.1 *O* alfabeto *do* CM *consiste dos seguintes símbolos:*

i) Símbolos de predicado*:* P, Q, R, S, T, U *e* V *(indexadas ou não).*

ii) Constantes*:* a, b, c, d *e* e *(indexadas ou não).*

iii) Conectivos*:* $\neg$ *(*não*),* $\wedge$ *(*e*),* $\vee$ *(*ou*),* $\rightarrow$ *(*se...então*) e* $\leftrightarrow$ *(*se, e somente se*).*

iv) Quantificadores*:* $\forall$ *(*para todo*) e* $\exists$ *(*existe ao menos um*).*

viii) Sinais de pontuação*:* (*(*abre parênteses*) e*) *(*fecha parênteses*).*

Definição 4.2 *i) Os símbolos* não-lógicos *do* CM *são as constantes e os símbolos de predicado.*

ii) Os símbolos lógicos *do* CM *são os conectivos e os quantificadores.*

As expressões bem formadas, ebfs, do CM se dividem em *termos* e *enunciados* (ou *fórmulas*). Termos são expressões que são utilizadas para nomear ou denotar objetos. Enunciados são expressões que são utilizadas para enunciar propriedades de objetos ou relações que se estabelecem entre objetos.

II. Um conjunto de regras de formação para termos As regras de formação determinam como os termos simbolizados devem ser formados a partir de símbolos do alfabeto.

Definição 4.3 *Os* termos*, do* CM *são dados pelas seguintes* regras de formação para termos*:*

Rt_1*) Uma constante é um termo simbolizado.*

Rt_2*) Uma variável é um termo simbolizado.*

Definição 4.4 *Seja t um termo do* CM*.*

i) t é fechado *se é uma constante.*

ii) t é aberto *se é uma variável.*

III. Um conjunto de regras de formação para enunciados

Definição 4.5 *Os* enunciados *do* CM *são dados por aplicação sucessiva das seguintes* regras de formação para enunciados*:*

Re_1*) Se P é um símbolo de predicado t é um termo simbolizado, então $P(t)$ é um enunciado simbolizado.*

Re_2) Se α e β são enunciados simbolizados, então $(\neg\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são enunciados simbolizados.

Re_3) Se x é uma variável e α um enunciado simbolizado, então $(\forall x\alpha)$ e $(\exists x\beta)$ são enunciados simbolizados.

Definição 4.6 *Seja x uma variável e α um enunciado simbolizado do* CM.

i) α *é* atômico *se é da forma $P(t)$.*

ii) α *é* molecular *se não é atômico, ou seja, se possui ocorrência de um conectivo e/ou quantificador.*

iii) Negações, conjunções, disjunções, implicações, biimplicações, componentes, antecedentes *e* conseqüentes *são definidos como no* CS.

iv) α *é uma* generalização *se é da forma $(\forall x\alpha)$.*

v) α *é um* existencial *se é da forma $(\exists x\alpha)$.*

vi) Nos enunciados $(\forall x\alpha)$ e $(\exists x\alpha)$, x é a variável de quantificação *e α é o* enunciado quantificado.

Por aplicação das regras de formação para enunciados, podemos obter tanto enunciados nos quais todas as variáveis ocorrem associadas a quantificadores, quanto enunciados nos quais isto não acontece.

Intuitivamente, podemos observar que se todas as variáveis que ocorrem num enunciado estão associadas a quantificadores, este enunciado possui um valor de verdade determinado, que depende somente do domínio de discurso considerado.

Exemplo 2 *O enunciado* para todo x, x é par *tem um valor de verdade que depende somente do domínio de discurso considerado. De fato, se o domínio considerado for o conjunto dos números pares, o enunciado é verdadeiro. Se for o conjunto dos números naturais, é falso.*

Por outro lado, um enunciado que possui a ocorrência de variáveis que não estão associadas a nenhum quantificador podem possuir valores de verdade que dependem tanto do domínio de discurso considerado, quanto dos valores atribuídos a estas variáveis, neste domínio.

Exemplo 3 *O enunciado* x é par*, no domínio dos números naturais, possui um valor de verdade que depende do valor atribuído a x. De fato, se $x = 2$, então o enunciado é verdadeiro. Se $x = 3$, o enunciado é falso.*

Temos então os seguintes conceitos:

Definição 4.7 *Seja α uma fórmula do* CM *e Q um quantificador que ocorre em α. O* escopo *de uma ocorrência de Q em α é a fórmula a qual Q foi aplicado, quando utilizado na formação de α.*

Definição 4.8 *Seja α uma fórmula do* CM *e x uma variável que ocorre em α.*

i) Uma ocorrência de x em α é ligada *se satisfaz a uma das seguintes condições:*

   1. É imediatamente seguinte a uma ocorrência de um quantificador.

   2. Está no escopo de um quantificador aplicado a x.

ii) Uma ocorrência de x em α é livre *se não é ligada.*

iii) x é uma variável ligada *de α se possui ao menos uma ocorrância ligada em α.*

iv) x é uma variável livre *de α se possui ao menos uma ocorrência livre em α.*

Observe que uma variável pode ser ao mesmo tempo livre e ligada em α.

Definição 4.9 *Seja α um enunciado do* CM*. α é uma* sentença *se não possui ocorrências de variáveis livres.*

Admitimos as mesmas convenções do CS para a redução do número de parênteses na escrita de enunciados.

Semântica do CM

O *valor de verdade* (verdadeiro ou falso) de uma sentença atômica depende do *contexto* em que a sentença está inserida.

Uma sentença atômica expressa uma propriedade sobre objetos de um determinado domínio. Ou seja, uma *propriedade* descreve um estado de coisas, dizendo se determinados objetos possuem, ou não, uma determinada característica.

De modo a evitar ambigüidade, uma propriedade deve satisfazer, ainda, as seguintes condições:

1) Os elementos que possuem uma determinada propriedade são todos de uma mesma categoria, isto é, pertencem todos a um mesmo domínio.

2) Dado um elemento de um domínio no qual está definida uma propriedade, uma e somente uma das alternativas acontece: ou ele possui a propriedade ou não possui a propriedade.

Assim, temos a seguinte definição:

Definição 4.10 *Seja D um conjunto qualquer. Uma* propriedade *em A é um subconjunto de A.*

O valor de verdade de um enunciado formado apenas a partir dos conectivos depende exclusivamente do valor de verdade dos enunciados utilizados na sua formação. Assim, o comportamento de cada conectivo em relação à determinação do valor de verdade do enunciado composto a partir do valor de verdade dos seus componentes é análogo ao modo como estes conectivos são utilizados no CS.

Temos, então os seguintes conceitos:

Definição 4.11 *Seja α um enunciado do* CM. *Uma* interpretação *para α consiste dos seguntes itens:*

i) Um conjunto não-vazio D, chamado o domínio de interpretação*, cujos elementos são chamados* indivíduos.

ii) A associação de uma propriedade a cada símbolo de predicado que ocorre em α.

iii) A associação de um indivíduo a cada constante que ocorre em α.

Dado um enunciado α e uma interpretação para α, teremos dois casos:

1) Se α é uma sentença, isto é, não possui ocorrências de variáveis livres, então associamos a α um conteúdo relativo a D, interpretando α de acordo com os significados que a interpretação associa aos símbolos que ocorrem em α.

2) Se α é aberto, isto é, possui ocorrência de ao menos uma variável livre, então associamos a α um conteúdo relativo a D, interpretando α de acordo com os significados que a interpretação associa aos símbolos que ocorrem em α e associando indivíduos às variáveis que ocorrem livre em α.

Temos, então os seguintes conceitos:

Definição 4.12 *Seja α um enunciado, I uma interpretação para α, com domínio D, e (se necessário) v uma associação de elementos de D às variáveis que ocorrem livres em α. α será* satisfeito *em I (com v) se o conteúdo que α expressa, quando interpretado de acordo com os significados que I e v associam aos seus símbolos realmente condiz com o que acontece em D.*

Assim, teremos as seguintes regras para a satisfação de α, de acordo com sua estrutura:

III) Regras de satisfação Seja α um enunciado do CM, I uma interpretação para A e (se necessário) uma associação de valores às variáveis v, a relação I satisfaz α com v é dada por aplicação sucessiva das seguintes *regras de avaliação*:

Rs_1) Se α é atômico da forma $P(t)$, então I satisfaz α com v se o indivíduo denotado por t possui a propriedade que é associada a P.

Rs_2) Se α é uma negação $\neg\beta$, então I satisfaz α com v se I não satisfaz β com v.

Rs_3) Se α é uma conjunção $(\beta \wedge \gamma)$, então I satisfaz α com v se I satisfaz ambos β e γ com v.

Rs_4) Se α é uma disjunção $(\beta \vee \gamma)$, então I satisfaz α com v se I satisfaz ao menos um dos enunciados β ou γ com v.

Rs_5) Se α é uma implicação $(\beta \to \gamma)$, então I satisfaz α com v se I não satisfaz β com v ou I satisfaz γ com v.

Rs_6) Se α é uma biimplicação $(\beta \leftrightarrow \gamma)$, então I satisfaz α com v se I satisfaz aos dois enunciados β e γ com v ou I não satisfaz a nenhum dos dois enunciados β e γ com v.

Rs_7) Se α é uma generalização $\forall x\beta$, então I satisfaz α com v se I satifaz β com toda associação que associa a cada variável diferente de x o mesmo valor que v (e a x associa um valor qualquer).

Rs_8) Se α é um existencial $\exists x\beta$, então I satisfaz α com v se I satifaz β com alguma associação que associa a cada variável diferente de x o mesmo valor que v (e a x associa um valor determinado).

Assim, interpretar um enunciado α consiste em efetuar os seguintes passos:

1) Determinar um domínio não vazio D.

2) Associar um significado em D a cada símbolo não-lógico que ocorre em α.

3) Associar um significado em D a cada variável livre que ocorre em α.

4) Determinar o significado de α a partir dos significados associados aos símbolos de α.

Se o significado acima condiz realmente com o que acontece em D, então o enunciado está satisfeito. Se não condiz, então não está.

Definição 4.13 *Seja α um enunciado.*

i) α *é* satisfazível *se existir uma interpretação* I *para* α *e uma assinalação de valores* v*, tal que* I *satisfaz* α *com* v*.*

ii) α *é* insatisfazível *se não é satisfazível.*

iii) α *é* válida *se toda interpretação e toda assinalação de valores satifazem* α*.*

4.1.1 Forma dos Enunciados Atômicos

Como na Lógica Monádica, os enunciados podem ser classificados em duas categorias, quanto à formação.

Definição 4.14 *Um enunciado é* atômico *se não possui a ocorrência de conectivos ou quantificadores.*

Na Lógica Monádica, consideramos o seguinte princípio sobre a forma dos enunciados atômicos:

Todo enunciado atômico é da forma Sujeito-Predicado.

Ou seja, um enunciado atômico expressa a *predicação* de uma *propriedade* a um elemento de um determinado domínio.

Exemplo 4 *a)* 2 é par.

Sujeito: 2

Predicado: ser par

b) 3 é maior do que 5

Sujeito: 3

Predicado: ser maior do que 5

c) A está entre B e C.

Sujeito: A

Predicado: estar entre B e C

d) Maria vai à feira com João.

Sujeito: Maria

Predicado: ir à feira com João

e) Maria e João são casados.

Sujeito: Maria e João *(sujeito composto)*

Predicado: serem casados

Em Lógica Matemática, na análise da forma de um enunciado atômico, considera-se que o número de elementos aos quais a propriedade é predicada. Assim, temos o princípio:

> *Todo enunciado atômico é da forma Predicado-Sujeito (quando a propriedade é aplicada a um único elemento) ou da forma Relação-Vários-Sujeitos (quando a propriedade é aplicada a mais de um elemento).*

Ou seja, um enunciado atômico expressa ou uma propriedade que se aplica a um elemento de um determinado domínio ou uma relação que se estabelece entre elementos de um determinado domínio.

Exemplo 5 *a)* 2 é par.

Sujeito: 2

Propriedade: ser par

b) 3 é maior do que 5

Sujeito 1: 3

Sujeito 2: 5

Relação: x é maior do que y

c) A está entre B e C.

Sujeito 1: A

Sujeito 2: B

Sujeito 3: C

Relação: x está entre y e z

d) Maria vai à feira com João.

Sujeito 1: Maria

Sujeito 2: João

Relação: x vai à feira com y

e) Maria e João são casados.

Sujeito 1: Maria

Sujeito 2: João

Relação: x é casado com y

Para sistematizar a reescrita de enunciados atômicos, devemos examinar um pouco melhor os conceitos de propriedade e relação.

4.1.2 Propriedades, Relações e Símbolos de Predicado

Uma *propriedade* descreve um estado de coisas, dizendo se um determinado elemento possui, ou não, uma característica.

Exemplo 6 *Vejamos dois exemplos de propriedades.*

a) A propriedade ser par *diz que certos números naturais são múltiplos de* 2*.*

b) A propriedade ser primo *diz que certos números naturais não possuem divisores diferentes de* 1 *e de si próprios.*

Para evitar ambigüidade na reescrita de enunciados atômicos, vamos exigir que uma propriedade satisfaça às seguintes condições:

1. Existe um domínio que contém todos os elementos sobre os quais faz sentido perguntar se possuem a propriedade.
2. Dado um elemento do domínio no qual a propriedade está definida, uma e somente uma das alternativas acontece: ou ele possui a propriedade ou ele não possui a propriedade.

Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 4.15 *i) Uma* propriedade P *em um domínio* D *é um subconjunto de* D*.*

ii) Dado a *um elemento qualquer de* D*, dizemos que* a *possui ou não a propriedade* P *caso* a *seja, ou não, um elemento de* P*.*

Exemplo 7 *A propriedade* ser par *é o conjunto* $\{0, 2, 4, \ldots\}$ *dos números pares.*

Uma *relação* descreve um estado de coisas, dizendo se determinados objetos encontram-se, ou não, associados de certa maneira.

Exemplo 8 *a) A relação* menor ou igual *diz que certos números naturais estão antes de outros na ordenação usual.*

b) A relação ser primos entre si *diz que certos números naturais têm* 1 *como único divisor comum.*

Para evitar ambigüidades na reescrita de enunciados atômicos, vamos exigir que uma relação satisfaça às seguintes condições:

1. Existe um domínio que contém todos os elementos sobre os quais faz sentido perguntar se estão relacionados.

2. O número de elementos relacionados é sempre constante e finito. Este número é chamado o *peso* da relação.

3. A ordem em que os elementos são dados pode influenciar no fato de estarem ou não relacionados.

4. Dados m elementos de um domínio no qual está definida uma relação de peso m, uma e somente uma das alternativas acontece: ou eles estão relacionados ou não estão relacionados.

Somos, assim, levados ao conceito de seqüência finita constituída de m elementos, tomados numa dada ordem. Sendo D um domínio e $a_1, \ldots, a_m$ elementos de D, a seqüência formada por estes elementos, tomados na ordem em que são dados, é denotada $(a_1, \ldots, a_m)$.

Como conseqüência dos itens 1, 2, 3 e 4, uma relação de peso m, definida em um domínio D, é determinada pelas seqüências finitas de m elementos de D que estão relacionados.

Formalmente, temos a seguinte definição:

Definição 4.16 *i) Uma* relação *R de peso m em um domínio D é um subconjunto do conjunto de todas as seqüências finitas de m elementos de D.*

ii) Dados $a_1, \ldots, a_m$ elementos quaisquer de D dizemos que $a_1, \ldots, a_m$ (tomados nesta ordem) estão, ou não, relacionados *segundo R, caso a seqüência $(a_1, \ldots, a_m)$ seja, ou não, um elemento de R.*

Escrevemos, como é usual, $R(a_1, \ldots, a_m)$ ao invés de $(a_1, \ldots, a_m) \in R$ e $\not R(a_1, \ldots, a_m)$ ao invés de $(a_1, \ldots, a_m) \notin R$.

Exemplo 9 *Tomando $\mathbb{N}$ como domínio, a relação* menor ou igual *é o conjunto das seqüências finitas de dois elementos (m, n), tal que m é igual ou está antes de n na ordenação usual.*

$$\begin{aligned} \leq\, = \{&(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), \ldots \\ &(1,1), (1,2), (1,3), \ldots \\ &(2,2), (2,3), \ldots\} \end{aligned}$$

Temos que 0 é menor ou igual a 1, pois $(0,1) \in \leq$ mas 1 não é menor ou igual a 0, pois $(1,0) \notin \leq$.

Definição 4.17 *Um* símbolo de predicado *é uma expressão de uma dada linguagem, que pode ser utilizada para denotar uma propriedade ou uma relação.*

Exemplo 10 *São exemplos de símbolo de predicado:*

a) Na aritmética:

Símbolo	*Relação*
$=$	igualdade
$<$	menor
$\leq$	menor ou igual
$\mid$	divide

b) Na teoria dos conjuntos:

Símbolo	*Relação*
$=$	igualdade
$\in$	pertinência
$\subseteq$	inclusão
$\subset$	inclusão própria

Os símbolos de predicado são classificados de acordo com o número de sujeitos que necessitam para a formação de um enunciado.

Definição 4.18 *O* peso *de um símbolo de predicado é o número exato de sujeitos utilizados para formar um enunciado, por meio deste símbolo de predicado.*

Exemplo 11 *Para os símbolos de predicado dados no Exemplo 10, temos:*

Símbolo	*Relação*	*Peso*
$=$	igualdade	*2*
$<$	menor	*2*
$\leq$	menor ou igual	*2*
$\in$	pertinência	*2*
$\subseteq$	inclusão	*2*
$\subset$	inclusão própria	*2*

Para reescrever enunciados atômicos, devemos reescrever as expressões que denotam propriedades, relações e sujeitos.

4.1.3 Reescrita de Símbolos de Predicado

Temos a seguinte regra para a reescrita de símbolos de predicado.

REGRA Um símbolo de predicado deve ser reescrito como $\alpha(x_1, \ldots, x_m)$, onde α é uma seqüência de letras maiúsculas, $x_1, \ldots, x_m$ são variáveis e m é o peso do símbolo de predicado.

Usualmente, a seqüência de letras maiúsculas utilizada na reescrita de símbolos de predicado é uma expressão que induz o significado da propriedade ou relação que ele denota.

Exemplo 12 *Para os símbolos de predicado do Exemplo 4, temos:*

a) PAR (x)

b) MAIOR (x, y)

c) ENTRE (x, y, z)

d) VAI-À-FEIRA (x, y)

e) CASADOS (x, y)

Exemplo 13 *Vamos agora reescrever os enunciados do Exemplo 4.*

a) 2 é par.

PAR (2)

Falta reescrever o sujeito 2*.*

b) 3 é maior do que 5*.*

MAIOR $(3, 5)$

Falta reescrever os sujeitos 3 *e* 5*.*

c) a está entre b e c*.*

ENTRE (a, b, c)

Falta reescrever os sujeitos a*,* b *e* c*.*

d) Maria vai à feira com João*.*

VAI-à-FEIRA (Maria,João)

Falta reescrever os sujeitos Maria *e* João*.*

e) Maria e João são casados*.*

CASADOS (João,Maria)

Falta reescrever os sujeitos João *e* Maria*.*

f) Paulo e Cybele são estudiosos*.*

ESTUDIOSO (Paulo) $\wedge$ ESTUDIOSO(Cybele)

Falta reescrever os sujeitos Paulo *e* Cybele*.*

g) A mãe de Marcelo é professora*.*

PROFESSORA (mãe de Marcelo)

Falta reescrever o sujeito mãe de Marcelo*.*

h) O carro de Marcelo é azul.

AZUL (carro de Marcelo)

Falta reescrever o sujeito carro de Marcelo.

i) Ele é professor.

PROFESSOR (Ele)

Falta reescrever o sujeito ele.

A reescrita de sujeitos segue os mesmos princípios da Lógica Monádica.

4.1.4 Simbolização de Enunciados

Os enunciados atômicos são aqueles que não podem ser formados a partir de enunciados anteriores. Como já vimos no parágrafo 4.1.1, os enunciados atômicos são formados a partir de termos por aplicação de símbolos de predicado e, portanto, podem ser somente de duas formas:

$$P(t) \text{ ou } R(t_1, \ldots, t_m)$$

Temos a seguinte regra para a reescrita de enunciados atômicos:

REGRA Um enunciado atômico deve ser reescrito de um dos seguintes modos:

1. $P(s)$, se for da forma Sujeito-Predicado, onde s e P são, respectivamente, o sujeito e o símbolo de predicado previamente reescritos.

2. $R(s_1, \ldots, s_m)$, se for da forma Relação-Vários sujeitos, onde $s_1, \ldots, s_m$ são os sujeitos previamente reescritos, e R é o símbolo de predicado previamente reescrito.

Exemplo 14 *Vejamos alguns exemplos de reescrita de enunciados atômicos.*

a) Marcelo é professor.

PROFESSOR(Marcelo)

b) x é um número perfeito.

NÚMERO-PERFEITO(x)

c) João é marido de Ana.

MARIDO(João,Ana)

d) Maria é mãe de Isabel e de Ana.

MÃE(Maria,Isabel,Ana)

Definição 4.19 *Um enunciado é* molecular *se não é atômico, isto é, se nela ocorre pelo menos um conectivo ou quantificador.*

Temos as seguintes regras para a reescrita de enunciados moleculares:

REGRA 1 As regras para negação, conjunção, disjunção, implicação e biimplicação são análogas às do CS.

REGRA 2 Uma generalização deve ser reescrita como $\forall x\alpha$, onde α é o enunciado generalizado previamente reescrito.

REGRA 3 Uma existencialização deve ser reescrita como $\exists x\alpha$, onde α é o enunciado existencializado previamente reescrito.

Exemplo 15 *Vejamos alguns exemplos de reescrita de enunciados moleculares.*

a) x não é um número perfeito.

$\neg$(NÚMERO-PERFEITO(x))

b) 2 é par e x é impar.

PAR(2) $\wedge$ ÍMPAR(x)

c) Se x é primo diferente de 2, então x é ímpar.

PRIMO(x) $\wedge$ DIFERENTE(x,2) $\rightarrow$ ÍMPAR(x)

d) Se a é par e b é ímpar, entao a e b são primos entre si.

PAR(a) $\wedge$ ÍMPAR(b) $\rightarrow$ PRIMOS-ENTRE-SI(a,b)

e) Todos os números são pares.

$\forall x$(NÚMERO(x) $\rightarrow$ PAR(x))

f) Existem números pares.

$\exists x$(NÚMERO(x) $\wedge$ PAR(x))

O processo de simbolização de enunciados é efetuado nos seguntes passos:

PASSO 1) Classificar o enunciado em atômico ou molecular.

PASSO 2) Se for atômico, classificar o enunciado em *Propriedade-Sujeito* ou *Relação-Vários-Sujeitos.*

2a. Reescrever o enunciado de acordo com as regras de reescrita.

2b. Substituir os termos por termos simbolizados e os símbolos de predicado por uma das letras P, Q, R, S ou T (indexada ou não), de modo que cada ocorrência de um mesmo símbolo de predicado seja substituindo pela mesma letra.

PASSO 3) Se o enunciado for molecular, classificar todos os conectivos e quantificadores que ocorrem nele e determinar se é negação, conjunção, disjunção, implicação, biimplicação, generalização ou existencialização.

3a. Reescrever o enunciado de acordo com as regras de reescrita.

3b. Simbolizar o enunciado reescrito, substituindo os termos reescritos por termos simbolizados, os símbolos de predicado pelas letras P, Q, R, S ou T (indexadas ou não), de modo que cada ocorrência de um mesmo símbolo de predicado seja substituído pela mesma letra.

Exemplo 16 *Para os enunciados do Exemplo 14, temos:*

a) $P(a)$

b) $Q(x)$

c) $R(a, b)$

d) $S(c, d, b)$

Exemplo 17 *Para os enunciados do Exemplo 15, temos:*

a) $P(a)$

b) $P(a) \wedge Q(x)$

c) $P(x) \wedge Q(x, a) \rightarrow R(x)$

d) $P(a) \wedge Q(b) \rightarrow S(c, d)$

e) $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$

f) $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$

Capítulo 5

Sistema Dedutivo

5.1 Regra T

5.1.1 Mais algumas limitações

Nas Seções 1.1 e 1.6.1, observamos que tanto as sentenças logicamente verdadeiras quanto os argumentos válidos desempenham um papel importante na prova de teoremas. Na Seção 1.6.3, desenvolvemos o Método das Tabelas de Verdade para determinar se uma sentença formada pelo uso dos conectivos *não*, *e*, *ou*, *se...então* e *se, e somente se* é logicamente verdadeira ou se um argumento formado por sentenças deste tipo é válido. Na Seção 2.1.2, mostramos que este método é insuficiente para os estudos de Lógica Matemática, pois existem argumentos da Matemática que são válidos mas que o método garante que são inválidos.

Para contornar esta limitação, estendemos o estudo da formação de sentenças para sentenças que possuem ocorrências dos quantificadores *para todo* e *existe*, além dos conectivos já estudados. Nosso objetivo agora será desenvolver um método para provar a validade de argumentos cujas sentenças são formadas por uso dos conectivos e quantificadores, que seja análogo à maneira como os matemáticos provam teoremas.

Certamente, você nunca viu um matemático provando teoremas utilizando (de maneira direta) O Método das Tabelas de Verdade (ou algum método semelhante). Isto se dá por dois motivos:

1. Embora seja um método tão simples que possa ser programado em um computador, o Método das Tabelas de Verdade é extremamente ineficiente, uma vez que, para verificar a validade de argumentos relativamente pequenos, necessitamos de tabelas com um número relativamente grande de linhas e colunas.

Exemplo 1 *Para verificar a validade do argumento abaixo, utilizando o Método das Tabelas de Verdade, devemos construir uma tabela com 32 linhas e, no mínimo, 14 colunas.*

$$\begin{array}{l} (p \vee q) \wedge (p \vee \neg r) \\ s \rightarrow t \\ t \rightarrow \neg q \\ s \wedge t \\ \hline p \end{array}$$

2. Mesmo os teoremas mais simples da Matemática não são sentenças formadas apenas pelo uso dos conectivos, mas possuem ocorrências dos quantificadores *para todo* e *existe*. Acontece que o Método das Tabelas de Verdade não pode ser adaptado para enunciados que possuem ocorrências de quantificadores. Na verdade, os lógicos provaram que não existe um método "simples", isto é, que possa ser programado em um computador, para determinar se um dado enunciado que possui ocorrências dos quantificadores *para todo* e *existe* é logicamente verdadeiro, ou não. Este tipo de limitação ocorre também com relação à determinação da validade de argumentos envolvendo enunciados deste tipo.

O que iremos fazer daqui por diante é estudar um método para mostrar que um dado enunciado é válido (ou que um dado enunciado é uma conseqüência lógica de outros enunciados) que é análogo à maneira como os matemáticos provam teoremas. Inicialmente, trataremos dos conectivos e depois estenderemos o método também para os quantificadores.

5.1.2 A Regra T

Para relacionar o Método das Tabelas de Verdade com a maneira como os matemáticos provam teoremas, mudaremos a nomenclatura e interpretaremos o que foi visto nos Capítulos 1 e 2 de uma maneira mais adequada.

Agindo de maneira análoga aos matemáticos, quando temos uma seqüência $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta$ de enunciados, ao invés de dizermos que queremos verificar se β é uma *conseqüência lógica* de $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, vamos dizer que o que queremos é verificar se β é *deduzível* a partir de $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$.

Definição 5.1 *Uma* regra de inferência *é um procedimento para deduzir uma conseqüência a partir de premissas.*

O que temos até o momento é uma regra que simplesmente reduz o problema da dedução à verificação da implicação tautológica, por meio das tabelas de verdade.

REGRA T [Regra para tautologias] Um enunciado β é deduzível a partir dos enunciados $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ se $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \models \beta$.

Isto é, β é deduzível a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ se o Método das Tabelas de Verdade garante que sim.

Exemplo 2 *Alguns exemplos da* Regra T *são:*

Regra 1 *A partir de α e $\alpha \to \beta$ podemos deduzir β.*

$$\begin{array}{l} \alpha \\ \underline{\alpha \to \beta} \\ \beta \end{array}$$

De fato, temos a tabela seguinte, que mostra que $\models \alpha \wedge (\alpha \to \beta) \to \beta$:

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \wedge (\alpha \to \beta)$	$\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \to \beta$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Regra 2 *A partir de $\neg\alpha$ e $\alpha \vee \beta$ podemos deduzir β.*

$$\begin{array}{l} \neg\alpha \\ \underline{\alpha \vee \beta} \\ \beta \end{array}$$

De fato, temos a tabela que mostra que $\models \neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \to \beta$:

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \beta$	$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \to \beta$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

Observe que:

1. A Regra T não é uma única regra, mas um conjunto de regras, cada uma obtida quando fixamos o valor de n (o número de premissas) e a forma das sentenças $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$.

2. Cada exemplo da Regra T não estipula a validade de um único argumento mas a validade de todos os argumentos que possuem uma mesma forma.

Exemplo 3 *A* Regra 1 *do Exemplo 2 garante que os seguintes argumentos são válidos, entre outros:*

$$\begin{array}{l} p \\ \underline{p \to q} \\ q \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \\ p \to (q \to p) \\ \hline q \to p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (q \to r)) \\ \hline (p \to q) \to (q \to r) \end{array}$$

Exemplo 4 *Alguns contra-exemplos da* REGRA T *são:*

REGRA 3 *A partir de β e $\alpha \to \beta$ podemos deduzir α.*

$$\begin{array}{l} \beta \\ \alpha \to \beta \\ \hline \alpha \end{array}$$

A REGRA 3 *não é um exemplo da* REGRA T*, como mostra a tabela:*

α	β	$\alpha \to \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Na terceira linha desta tabela, as premissas β e $\alpha \to \beta$ possuem valor de verdade V e a conclusão α possui valor de verdade F.

REGRA 4 *A partir de $\neg\alpha$ e de $\alpha \to \beta$ podemos deduzir $\neg\beta$.*

$$\begin{array}{l} \neg\alpha \\ \alpha \to \beta \\ \hline \neg\beta \end{array}$$

A REGRA 4 *não é um exemplo da* REGRA T*, como mostra a tabela:*

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \to \beta$	$\neg\beta$
V	V	F	V	F
V	F	F	F	V
F	V	V	V	F
F	F	V	V	V

Na terceira linha desta tabela, as premissas $\neg\alpha$ e $\alpha \to \beta$ possuem valor de verdade V e a conclusão $\neg\beta$ possui valor de verdade F.

5.1.3 Utilizando a Regra T

Dados os enunciados $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta$ podemos, então, verificar se β é deduzível a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, utilizando a Regra T. Isto é o que temos feito até o momento. Mas por que os matemáticos não fazem assim? Porque a Regra T dá *passos grandes* demais.

Exemplo 5 *Para verificar se:*

$$\begin{array}{l} p \to (r \lor \neg q) \\ \neg r \\ q \land s \to p \\ \neg r \to p \\ \neg s \to r \\ \hline \neg q \end{array}$$

é um argumento válido, utilizando a Regra T*, devemos construir uma tabela com 16 linhas.*

A idéia é, então, aproximar o uso da Regra T da maneira como os matemáticos provam teoremas, "quebrando" o único passo dado pela Regra T em uma série de *passos pequenos.*

Exemplo 6 *Voltando ao argumento do Exemplo 5, temos, utilizando as regras do Exemplo 2: Os enunciados:*

$$\begin{array}{l} p \to (r \lor \neg q) \\ \neg r \\ q \land s \to p \\ \neg r \to p \\ \neg s \to r \end{array}$$

são as premissas a partir das quais queremos deduzir $\neg q$. Das premissas $\neg r$ e $\neg r \to p$, podemos deduzir p, aplicando a Regra 1*; a partir de p e $p \to (r \lor \neg q)$, podemos deduzir $r \lor \neg q$, aplicando a* Regra 1*; a partir de $\neg r$ e $r \lor \neg q$ podemos, afinal, deduzir $\neg q$, aplicando a* Regra 2*; assim, com duas aplicações da* Regra 1 *e uma aplicação da* Regra 2*, mostramos que o argumento é válido sem fazer a tabela com 16 linhas. (Na verdade, fizemos somente as tabelas pequenas, mostrando que os argumentos dados pela* Regra 1 *e pela* Regra 2 *são válidos.)*

Exemplo 7 *Vamos agora mostrar a validade do argumento:*

$$\begin{array}{l} q \to t \\ s \land q \\ t \to r \\ \neg r \lor (s \lor t) \\ \hline s \lor t \end{array}$$

utilizando a Regra 1 *e a* Regra 2 *em conjunto com as seguintes:*

Regra 5 *A partir de* $\alpha \wedge \beta$ *podemos deduzir* β.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

Regra 6 *A partir de* α *e* $\neg\alpha \vee \beta$ *podemos deduzir* β.

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \\ \neg\alpha \vee \beta\end{array}}{\beta}$$

Inicialmente, observamos que a Regra 5 *e a* Regra 6 *são exemplos da* Regra T, *como mostram as tabelas:*

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \beta \to \beta$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

α	β	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \vee \beta$	$\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \beta)$	$\alpha \wedge (\neg\alpha \vee \beta) \to \beta$
V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	F	V
F	F	V	V	F	V

Agora, como queremos deduzir $s \vee t$ *e temos* $\neg r \vee (s \vee t)$ *como premissa, basta deduzir* r *das premissas e aplicar a* Regra 6. *Como queremos deduzir* r *e temos* $t \to r$ *como premissa, basta deduzir* t *e aplicar a* Regra 1. *Como queremos deduzir* t *e temos* $q \to t$ *como premissa, basta deduzir* q *e aplicar novamente a* Regra 1. *Finalmente, podemos deduzir* q *a partir da premissa* $s \wedge q$, *aplicando a* Regra 5. *Assim, temos a seguinte dedução de* $s \vee t$ *a partir das premissas dadas: da premissa* $s \wedge q$ *deduzimos* q, *aplicando a* Regra 5; *a partir de* q *e* $q \to t$, *deduzimos* t, *aplicando a* Regra 1; *a partir de* t *e* $t \to r$, *deduzimos* r, *aplicando novamente a* Regra 1; *agora que temos* r, *deduzimos finalmente* $s \vee t$ *a partir de* $\neg r \vee (s \vee t)$, *aplicando a* Regra 6.

Dado um argumento que queremos mostrar ser válido, deduzindo sua conclusão a partir das premissas, utilizando a Regra T, algumas questões que podemos levantar são:

1. Existem exemplos da Regra T que podem ser utilizados para efetuarmos a dedução a partir das premissas?

2. Se existem esses exemplos, como encontrá-los e como utilizá-los para fazer a dedução?

A primeira questão possui uma resposta imediata. De fato, em último caso, basta fazer a tabela de todo o argumento como um único exemplo da REGRA T e mostrar que o argumento é válido.

Para a segunda questão a resposta é que, ao invés de utilizar a REGRA T como um todo, vamos utilizar a um conjunto mais restrito de regras que nos permita elaborar uma *estratégia de prova*. Para definir esse conjunto, vamos examinar um pouco mais detalhadamente a maneira como os matemáticos provam teoremas.

5.2 Método de Análise e Síntese

5.2.1 Análise e Síntese

A maneira como os matemáticos provam teoremas pode ser descrita como um refinamento do uso combinado de dois métodos:

O método de análise

Dadas as sentenças $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$, se queremos deduzir β a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, fazemos o seguinte:

PASSO 1) Examinamos as premissas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, de modo a encontrar um enunciado δ_1 que seja deduzível a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de maneira mais imediata que β e com a ajuda do qual possamos deduzir β, ou seja:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}{\delta_1} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \delta_1}{\beta}$$

Por exemplo, para deduzir $\neg q$ a partir das premissas dadas no Exemplo 6, efetuamos um primeiro passo, deduzindo p, com o auxílio do qual efetuamos o restante da dedução.

PASSO 2) Consideramos δ_1 como uma premissa adicional e examinamos os enunciados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \delta_1$, de modo a encontrar um enunciado δ_2, que seja deduzível a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \delta_1$, de maneira mais imediata que β e com a ajuda do qual possamos deduzir β, ou seja:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \delta_1}{\delta_2} \quad \text{e} \quad \frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \delta_1, \delta_2}{\beta}$$

Por exemplo, para deduzir $\neg q$ a partir das premissas dadas no Exemplo 6, com o auxílio de p, efetuamos um segundo passo, deduzindo $q \to r$, com o auxílio do qual efetuamos o restante da dedução.

PASSO 3) Efetuamos o procedimento esboçado acima até encontrarmos enunciados $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$, tais que β seja deduzível de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ de maneira imediata, ou seja:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n}{\beta}$$

Por exemplo, para concluir a dedução no Exemplo 6, com o auxílio de p e $q \rightarrow r$, efetuamos um passo final, deduzindo $\neg q$.

Escolhendo os enunciados $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ de maneira adequada, ao final do processo, teremos simplesmente:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}{\beta},$$

como queríamos. Ou seja, os enunciados $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m$ não devem acrescentar informação às premissas, servindo apenas como *enunciados auxiliares* na dedução de β a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

Por exemplo, as sentenças simbolizadas p e $q \rightarrow r$, que foram utilizadas como auxiliares na dedução de $\neg q$ a partir das premissas dadas no Exemplo 6, não são consideradas como "premissas adicionais" pois foram deduzidas a partir das premissas dadas por meio de passos lógicos e, portanto, já estavam, de um certo modo, contidas nestas premissas. Assim, não acrescentam nenhuma informação às premissas dadas.

Exemplo 8 *Um exemplo de dedução utilizando o Método de Análise é o seguinte:*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ t \wedge p \\ \neg t \vee q \\ \hline r \end{array}$$

Neste caso, a partir da premissa $t \wedge p$ podemos deduzir p; a partir da premissa p e $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ podemos deduzir $q \rightarrow r$; a partir da premissa $t \wedge p$ também podemos deduzir t; a partir de t e da premissa $\neg t \vee q$ podemos deduzir q; a partir de q e $q \rightarrow r$ podemos, finalmente, deduzir r.

Observe que iniciamos a dedução acima examinando as premissas do argumento. Utilizamos os mesmos exemplos de Regra T *utilizados no Exemplo 7.*

O método de síntese

Dadas a sentenças $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \beta$, se queremos deduzir β a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, fazemos o seguinte:

Passo 1) Examinamos a conclusão β de modo a encontrar um enunciado δ_1 que seja deduzível a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de maneira mais imediata que β e com a ajuda do qual possamos deduzir β, ou seja:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}{\delta_1} \quad \text{e} \quad \frac{\delta_1}{\beta}$$

Por exemplo, para deduzir $s \vee t$ a partir das premissas dadas no Exemplo 7, efetuando um primeiro passo para descobrir que necessitávamos deduzir r, com o auxílio do qual efetuamos o restante da dedução.

Passo 2) Examinamos o enunciado δ_1 de modo a encontrar um enunciado δ_2, tal que δ_2 seja deduzido a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de maneira mais imediata que δ_1 e com a ajuda do qual possamos deduzir δ_1, ou seja:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}{\delta_2}\ ,\ \frac{\delta_2}{\delta_1}\ \text{ e }\ \frac{\delta_1}{\beta}$$

Por exemplo, para deduzir r a partir das premissas dadas no Exemplo 7, efetuamos um segundo passo para descobrir que necessitávamos deduzir t, com o auxílio do qual efetuamos o restante da dedução.

Passo 3) Efetuamos o procedimento esboçado acima até chegarmos a enunciados $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ tais que δ_n seja deduzível a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; δ_{n-1} seja deduzível a partir de δ_n; $\ldots$; δ_1 seja deduzível a partir de δ_2 e, finalmente, β seja deduzível a partir de δ_1 de maneira imediata, ou seja:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}{\delta_n}\ ,\ \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}}\ ,\ \ldots\ ,\ \frac{\delta_2}{\delta_1}\ \text{ e }\ \frac{\delta_1}{\beta}$$

Analogamente ao que acontece no Método de Análise, devemos escolher os enunciados $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ de maneira adequada para que, ao final do processo, tenhamos simplesmente:

$$\frac{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m}{\beta},$$

como queríamos.

Por exemplo, pela mesma razão que no Exemplo 6, as sentenças simbolizadas r, t e q, que foram utilizadas como auxiliares na dedução de $s \vee t$ a partir das premissas dadas no Exemplo 7, não são consideradas como "premissas adicionais" e não acrescentam nenhuma informação às premissas dadas.

Exemplo 9 *Um exemplo de dedução utilizando o Método de Síntese é o seguinte:*

$$\begin{array}{l} \neg p \vee (q \to r) \\ t \wedge p \\ t \to q \\ \hline r \vee s \end{array}$$

Neste caso, para deduzir a conclusão $r \vee s$ basta deduzir r a partir das premissas; para deduzir r basta deduzir q e $q \to r$; para deduzir $q \to r$ basta deduzir p e utilizar a premissa $\neg p \vee (q \to r)$; para deduzir p basta utilizar a premissa $t \wedge p$. Por outro lado, para deduzir q basta deduzir t e utilizar a premissa $t \to q$; para deduzir t basta, finalmente, utilizar a premissa $t \wedge p$.

Assim, temos a seguinte dedução de $r \vee s$ a partir das premissas dadas: da premissa $t \wedge p$ deduzimos t; a partir de t e da premissa $t \to q$, deduzimos q; da premissa $t \wedge p$ também podemos deduzir p; a partir de p e da premissa $\neg p \vee (q \to r)$, deduzimos $q \to r$; a partir de q e $q \to r$, deduzimos r. Finalmente, a partir de r, deduzimos $r \vee s$.

Observe que iniciamos a dedução acima examinando a conclusão do argumento. Além das regras já vistas nos exemplos anteriores, utilizamos também a regra:

Regra 7 A partir de α podemos deduzir $\alpha \vee \beta$:

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$$

que é um exemplo da Regra T, como nos mostra a tabela:

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to (\alpha \vee \beta)$
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

O *método de dedução* que iremos apresentar é uma combinação dos dois métodos, o de análise e o de síntese, com a Regra T.

Seguindo o *Método de Análise*, se estamos tentando deduzir uma conclusão β a partir das premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, devemos examinar $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ de maneira a obter enunciados auxiliares que facilitem a dedução. Seguindo o *Método de Síntese*, nestas mesmas circunstâncias, devemos examinar β para obter tais enunciados auxiliares. Mas, para que os enunciados auxiliares obtidos realmente facilitem a dedução de β a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, é necessário que eles sejam mais simples que $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ e β. No entanto, devemos estipular o que entendemos por simplicidade. A idéia é, então, utilizar como *medida de simplicidade* a estrutura dos enunciados, no seguinte sentido:

1. Sempre que estivermos buscando por enunciados auxiliares no Método de Análise: tentaremos utilizar as componentes das premissas como auxiliares.

2. Sempre que estivermos buscando por enunciados auxiliares no Método de Síntese: tentaremos utilizar as componentes da conclusão como auxiliares.

3. Se isto não for possível, buscaremos por enunciados que a análise ou síntese nos leve a concluir estarem diretamente relacionados com estas componentes. Para encontrar estes enunciados diretamente relacionados com as componentes, examinaremos, em cada caso, a maneira como os matemáticos provam teoremas, em função da estrutura do enunciados que está sendo considerado.

Assim, nas próximas seções, examinaremos o que fazer nos casos acima, de acordo com a estrutura do enunciado em exame, ou seja, de acordo com o caso de ele ser uma negação, uma conjunção, uma disjunção, uma implicação, uma biimplicação, uma generalização ou um existencial.

5.2.2 Eliminação do $\rightarrow$

Aplicaremos as idéias apresentadas nas seções anteriores para decidir que passo devemos efetuar quando estivermos utilizando implicações como premissas em deduções. Como estamos examinando premissas, devemos utilizar o Método de Análise. De acordo com o Método de Análise e com as observações no final da Seção 5.2.1, quando queremos utilizar uma implicação $\alpha \rightarrow \beta$ como premissa, devemos nos perguntar que enunciado podemos deduzir imediatamente a partir de $\alpha \rightarrow \beta$ que esteja diretamente relacionado com $\alpha \rightarrow \beta$.

Exemplo 10 *Tentativas imediatas de responder a esta questão nos levam ao seguinte:*

REGRA 1 *A partir de $\alpha \rightarrow \beta$ podemos deduzir α.*

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\alpha}$$

REGRA 2 *A partir de $\alpha \rightarrow \beta$ podemos deduzir β.*

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Mas a REGRA 1 *e a* REGRA 2 *não são corretas, como mostra a tabela:*

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

De fato, na terceira linha da tabela, $\alpha \rightarrow \beta$ é V e α é F, mostrando que a REGRA 1 *não é correta. E, na quarta linha da tabela, $\alpha \rightarrow \beta$ é V e β é F, mostrando que a* REGRA 2 *não é correta.*

Exemplo 11 *Uma tentativa correta mas não adequada seria:*

REGRA 3 *A partir de $\alpha \rightarrow \beta$ podemos deduzir $\neg\alpha \vee \beta$.*

A REGRA 3 *está correta, como mostra a tabela:*

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$	$\neg\alpha$	$\neg\alpha \vee \beta$	$(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha \vee \beta$
V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Mas a conclusão da regra, $\neg\alpha \vee \beta$*, não é considerada relacionada com* α *e* β *de maneira tão imediata quanto se queria.*

Uma maneira de se obter a partir de $\alpha \to \beta$ uma conclusão que seja correta e esteja relacionada diretamente com α e β é considerar que dada uma implicação, quando temos como hipótese o antecedente (que está diretamente relacionado com α), devemos necessariamente deduzir o conseqüente (que está diretamente relacionado com β). Temos, então a seguinte regra:

REGRA DE MODUS PONENS, MP A partir de α e $\alpha \to \beta$, podemos deduzir β.

$$\begin{array}{l} \alpha \\ \alpha \to \beta \\ \hline \beta \end{array}$$

MP é correta, como mostra a tabela:

α	β	$\alpha \to \beta$	$\alpha \wedge (\alpha \to \beta)$	$\alpha \wedge (\alpha \to \beta) \to \beta$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	F	V

Exemplo 12 *Vamos mostrar a validade do argumento:*

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ p \\ \hline r \end{array}$$

utilizando MP*.*

Queremos deduzir a conclusão r*. Isto pode ser feito a partir de* $q \to r$*, se temos* q*. Mas* q *pode ser deduzido a partir de* $p \to q$*, se temos* p*. Mas* p *é uma das premissas. Assim, temos a dedução:*

$$\begin{array}{rcl} P & 1 & p \to q \\ P & 2 & q \to r \\ P & 3 & p \\ 1,3,\mathrm{MP} & 4 & q \\ 2,4,\mathrm{MP} & 5 & r \end{array}$$

Observe o seguinte:

1. No exemplo acima, utilizamos o procedimento de rotular as sentenças simbolizadas que são utilizadas na dedução. Cada uma das sentenças recebe um *número* e uma *justificativa* que é uma explicação do motivo pelo qual ela ocorre na dedução. No

caso considerado, as justificativas podem ser de dois tipos: "P", justificando que a sentença rotulada é uma premissa ou "m,n,MP", justificando que a sentença rotulada é obtida por aplicação de MP às sentenças numeradas por m e n.

2. MP deve ser usada nos casos em que a implicação ocorre como premissa.

3. Numa aplicação da MP *eliminamos* uma ocorrência do $\rightarrow$. Por esta razão, MP é também chamada *Regra de Eliminação do* $\rightarrow$.

4. MP é um exemplo da REGRA T.

5.2.3 Introdução do $\rightarrow$

Vamos agora decidir que passo devemos efetuar quando estivermos deduzindo implicações como conclusões. Como estamos examinando conclusões, devemos utilizar o Método de Síntese. De acordo com o Método de Síntese e as observações no final da Seção 5.2.1, devemos nos perguntar que enunciado que esteja diretamente relacionado com α e β devemos ter como premissa adicional para que possamos deduzir imediatamente $\alpha \rightarrow \beta$.

Exemplo 13 *Tentativas imediatas de responder a esta questão nos levam ao seguinte:*

REGRA 1 *A partir de α podemos deduzir $\alpha \rightarrow \beta$.*

$$\frac{\alpha}{\alpha \rightarrow \beta}$$

REGRA 2 *A partir de β podemos deduzir $\alpha \rightarrow \beta$.*

$$\frac{\beta}{\alpha \rightarrow \beta}$$

Mas a REGRA 1 *não é correta, como mostra a tabela:*

α	β	$\alpha \rightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	F

De fato, na segunda linha da tabela α é V e $\alpha \rightarrow \beta$ é F, mostrando que a Regra 1 não é correta.

Já a REGRA 2 *é correta, como mostra a tabela:*

α	β	$\alpha \to \beta$	$\beta \to (\alpha \to \beta)$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Como a premissa da regra é um enunciado diretamente relacionado com α e β, podemos ser induzidos a considerar que esta é a regra que estamos procurando. Mas isto não é verdade, por uma razão ligada à maneira como definimos o $\to$. Embora tenhamos que a implicação é verdadeira todas as vezes em que o conseqüente é verdadeiro, este não é o único motivo para que isto aconteça. De fato, podemos ter implicações verdadeiras com o conseqüente falso. Para isso, basta que o antecedente seja falso. Assim, se adotamos esta regra para o uso do $\to$, estaremos possivelmente perdendo *a validade de alguns argumentos.*

Uma regra que é ao mesmo tempo correta e adequada está diretamente associada ao modo como os matemáticos provam teoremas que são implicações. Usualmente, para provar uma implicação $\alpha \to \beta$ a partir de certas premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ os matemáticos fazem o seguinte:

1. Assumem como premissa adicional que α é verdadeiro.
2. Usando α em conjunto com $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, provam β.

Se conseguem fazer isso, consideram que o teorema está provado.

Exemplo 14 *Baseado nas propriedades usuais da multiplicação de números naturais e no fato de que um número natural n é* par *se, e somente se, existe um outro natural k tal que $n = 2k$, podemos apresentar uma prova do seguinte fato:*

Proposição 5.1 *Dado um natural n, se n é par, então n^2 é par.*

Prova: *Suponhamos que n é par. Daí, existe um número natural k_1, tal que $n = 2k_1$. Daí, $n^2 = 4k_1^2 = 2(2k_1^2)$. Portanto, existe um número natural $k_2 = 2k_1^2$ tal que $n^2 = 2k_2$. Logo, n^2 também é par.* ∎

Observe que o resultado provado anteriormente é a implicação:

$$(n \text{ é par}) \to (n^2 \text{ é par})$$

e que a prova é feita assumindo $(n$ é par$)$ como premissa adicional e provando $(n^2$ é par$)$, a partir daí. Como assumimos o enunciado $(n$ é par$)$ e concluímos $(n^2$ é par$)$, utilizando somente os fatos assumidos anteriormente, consideramos que a proposição está provada.

Temos, então, a seguinte regra:

Regra do Teorema da Dedução, TD Se concluímos β a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha$, então podemos concluir $\alpha \to \beta$ a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

$$\text{Se } \frac{\alpha, \ldots, \alpha_m, \alpha}{\beta}, \text{ então } \frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}{\alpha \to \beta}$$

Exemplo 15 *Vamos verificar a validade do seguinte argumento, utilizando* MP *e* TD*:*

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \to q \\ \hline p \to r \end{array}$$

Como queremos deduzir $p \to r$, aplicando TD*, devemos acrescentar p como premissa adicional e provar r. Ou seja, passar para o argumento:*

$$\begin{array}{l} p \to (q \to r) \\ p \to q \\ p \\ \hline r \end{array}$$

Queremos, agora, deduzir a conclusão r.

Isto pode ser feito a partir de $p \to (q \to r)$, se temos p e q. Mas p é a premissa adicional. Assim, aplicando MP*, temos $q \to r$. Agora podemos deduzir r, se temos q. Mas q decorre de p e $p \to q$, por* MP*. Assim, temos a dedução:*

$$\begin{array}{rcl} P & 1 & p \to (q \to r) \\ P & 2 & p \to q \\ H,\mathrm{TD} & 3 & p \\ 2,3,\mathrm{MP} & 4 & q \\ 1,4,\mathrm{MP} & 5 & q \to r \\ 4,5,\mathrm{MP} & 6 & r \\ 3,6,\mathrm{TD} & 7 & p \to r \end{array}$$

Observe o seguinte:

1. Estendemos o procedimento de rotulação das sentenças que ocorrem na dedução, pela introdução de duas novas justificativas:

   1a. "H,TD", justificando que a sentença rotulada é uma premissa adicional, introduzida pelo uso de TD;

   1b. "m,n,TD", justificando que a sentença rotulada é a implicação obtida pela dedução da sentença numerada por n a partir da premissa adicional numerada por m.

2. TD deve ser usado nos casos em que a implicação ocorre como conclusão.

3. Em uma aplicação de TD, *introduzimos* uma ocorrência do $\rightarrow$. Por esta razão, TD é também chamado *Regra de Introdução do* $\rightarrow$.

4. TD não é um exemplo da Regra T, pois não estipula diretamente a dedução de $\alpha \rightarrow \beta$ a partir de uma premissa. Mas afirma que podemos considerar $\alpha \rightarrow \beta$ deduzida se efetuarmos uma dedução de β tomando α como premissa adicional. Assim, em toda dedução feita por aplicação de TD, ocorre necessariamente a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{rll}
 & \vdots & \\
\text{H,TD} & m & \alpha \\
 & \vdots & \\
 & n & \beta \\
m,n,\text{TD} & n+1 & \alpha \rightarrow \beta \\
 & \vdots &
\end{array}$$

A parte que está dentro do retângulo é a dedução de β a partir de α, que pode ser feita para que justifiquemos a implicação $\alpha \rightarrow \beta$, aplicando TD. Dentro do retângulo ou fora dele, podem ocorrer outras aplicações de TD.

5.2.4 Eliminação do $\wedge$

Vamos agora decidir que passo devemos efetuar quando estivermos utilizando conjunções como premissas em deduções. Como estamos examinado premissas, devemos utilizar o Método de Análise. De acordo com o Método de Análise e as observações no final da Seção 5.2.1, quando queremos utilizar uma conjunção $\alpha \wedge \beta$ como premissa, devemos nos perguntar que enunciado podemos deduzir imediatamente a partir de $\alpha \wedge \beta$ que esteja diretamente relacionado com α e β.

Tentativas imediatas de responder a esta questão nos levam ao seguinte:

Regra de eliminação do $\wedge$, $\wedge$-el Temos as seguintes regras:

a) A partir de $\alpha \wedge \beta$, podemos deduzir α.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$$

b) A partir de $\alpha \wedge \beta$, podemos deduzir β.

$$\frac{(\alpha \wedge \beta)}{\beta}$$

As regras $\wedge$-el são corretas, como mostra a tabela:

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \beta \rightarrow \alpha$	$\alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Não escolhemos apenas uma entre as duas possibilidades imediatas na eliminação do $\wedge$ porque a verdade da conjunção acarreta a verdade dos dois componentes e não apenas a verdade de um deles.

Exemplo 16 *Vamos verificar a validade do seguinte argumento, utilizando* $\wedge$-el *em conjunto com as outras regras:*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge s) \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

Como queremos deduzir $p \rightarrow r$, aplicando TD*, basta acrescentar p como premissa adicional e deduzir r. Ou seja, passar para o argumento:*

$$\begin{array}{l} p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge s) \\ p \\ \hline r \end{array}$$

Queremos agora deduzir a conclusão r. Isto pode ser feito a partir de $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ se temos p e q. Mas p é a premissa adicional. Assim, aplicando MP*, temos $q \rightarrow r$. Agora podemos deduzir r, se temos q. De acordo com a premissa $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge s)$, podemos deduzir q a partir de p. De fato, aplicando* MP*, a partir de $p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge s)$, temos $(p \rightarrow q) \wedge s$. Agora, aplicando* $\wedge$-el*, temos $p \rightarrow q$. Aplicando* MP *novamente, temos q. Agora que temos q e $q \rightarrow r$, aplicando* MP *temos, finalmente, r. Assim, temos a dedução:*

$$\begin{array}{rll} P & \mathit{1} & p \rightarrow (q \rightarrow r) \\ P & \mathit{2} & p \rightarrow ((p \rightarrow q) \wedge s) \\ H,\mathrm{TD} & \mathit{3} & p \\ \mathit{2,3},\mathrm{MP} & \mathit{4} & (p \rightarrow q) \wedge s \\ \mathit{4},\wedge\text{-el} & \mathit{5} & p \rightarrow q \\ \mathit{3,5},\mathrm{MP} & \mathit{6} & q \\ \mathit{1,3},\mathrm{MP} & \mathit{7} & q \rightarrow r \\ \mathit{6,7},\mathrm{MP} & \mathit{8} & r \\ \mathit{3,8},\mathrm{TD} & \mathit{9} & p \rightarrow r \end{array}$$

Observe o seguinte:

1. Estendemos o procedimento de rotulação das sentenças que ocorrem nas deduções, pela introdução de uma nova justificativa: "m,$\wedge$-el", justificando que a sentença rotulada é obtida por aplicação de $\wedge$-el a partir da sentença numerada por m.

2. $\wedge$-el consiste de duas partes: a primeira é a dedução do primeiro componente e a segunda é a dedução do segundo componente da conjunção.

3. $\wedge$-el deve ser usada nos casos em que a conjunção ocorre como premissa.

4. Em uma aplicação de $\wedge$-el, *eliminamos* uma ocorrência do $\wedge$. Por esta razão, $\wedge$-el é também chamada *Regra de Eliminação do* $\wedge$.

5. $\wedge$-el é um exemplo da Regra T.

5.2.5 Introdução do $\wedge$

Vamos agora decidir que passo devemos efetuar quando estivermos deduzindo conjunções como conclusões. Como estamos examinando conclusões, devemos utilizar o Método de Síntese. De acordo com o Método de Síntese e as observações no final da Seção 5.2.1, devemos nos perguntar que enunciados diretamente relacionados com α e β devemos ter como premissas para que possamos deduzir imediatamente $\alpha \wedge \beta$.

Tentativas imediatas de responder a esta questão nos levam ao seguinte:

Regra de introdução do $\wedge$, $\wedge$-int   A partir de α e β, podemos deduzir $\alpha \wedge \beta$.

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\end{array}}{\alpha \wedge \beta}$$

A regra $\wedge$-int é correta, como mostra a tabela:

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \wedge \beta \to \alpha \wedge \beta$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Exemplo 17 *Vamos verificar a validade do seguinte argumento, utilizando* $\wedge$-int *e* $\wedge$-el*:*

$$\frac{p \wedge q}{q \wedge p}$$

Como queremos deduzir $q \wedge p$, segundo $\wedge$-int *basta deduzirmos q e p. Mas isto pode ser feito, a partir da premissa $p \wedge q$, aplicando* $\wedge$-el*. Assim, temos a seguinte dedução:*

P	*1*	$p \wedge q$
1,$\wedge$-el	*2*	p
1,$\wedge$-el	*3*	q
2,3,$\wedge$-int	*4*	$q \wedge p$

Observe o seguinte:

1. Estendemos o procedimento de rotulação das sentenças que ocorrem nas deduções, pela introdução de uma nova justificativa: "m,n,$\wedge$-int", justificando que a sentença rotulada é obtida por aplicação de $\wedge$-int das sentenças numeradas por m e n.

2. $\wedge$-int deve ser utilizada nos casos em que a conjunção ocorre como conclusão.

3. Em uma aplicação de $\wedge$-int, *introduzimos* uma ocorrência do $\wedge$. Por esta razão, $\wedge$-int é também chamada *Regra de Introdução do* $\wedge$.

4. $\wedge$-int é um exemplo da Regra T.

5.2.6 Introdução do $\vee$

Vamos agora decidir que passo devemos efetuar quando estivermos deduzindo disjunções como conclusões. Como estamos examinando conclusões, devemos utilizar o Método de Síntese. De acordo com o Método de Síntese e com as observações no final da Seção 5.2.1, devemos nos perguntar que enunciados diretamente relacionados com α e β devemos ter como premissas para que possamos deduzir imediatamente $\alpha \vee \beta$.

Tentativas imediatas de responder a esta questão nos levam ao seguinte:

Regra de introdução do $\vee$, $\vee$-int Temos as seguintes regras:

a) A partir de α, podemos deduzir $\alpha \vee \beta$.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$$

b) A partir de β, podemos deduzir $\alpha \vee \beta$.

$$\frac{\beta}{\alpha \vee \beta}$$

As regras $\vee$-int são corretas, como mostra a tabela:

α	β	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \to \alpha \vee \beta$	$\beta \to \alpha \vee \beta$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	V

Não escolhemos apenas uma entre as duas possibilidades imediatas na introdução do $\vee$ porque, embora a verdade da disjunção seja acarretada pela verdade de apenas um dos seus componentes, não podemos de antemão dizer qual dos dois componentes deve ser verdadeiro.

Exemplo 18 *Vamos mostrar a validade do seguinte argumento, utilizando* $\vee$-int *em conjunto com as outras regras:*

$$\frac{p \wedge q}{(p \vee r) \wedge (q \vee s)}$$

Como queremos deduzir $(p \vee r) \wedge (q \vee s)$*, segundo* $\wedge$*-int, basta deduzir* $p \vee r$ *e* $q \vee s$ *a partir da premissa* $p \wedge q$*. Ou seja, passar para cada um dos argumentos:*

$$\frac{p \wedge q}{p \vee r} \quad e \quad \frac{p \wedge q}{q \vee s}$$

Para deduzir $p \vee r$*, segundo* $\vee$-int*, basta deduzir* p*. Mas isto pode ser feito, a partir de* $p \wedge q$*, aplicando* $\wedge$-el*. Analogamente, para deduzir* $q \vee s$*, segundo* $\vee$-int*, basta deduzir* q*. Mas isto pode ser feito, a partir de* $p \wedge q$*, aplicando* $\wedge$-el*. Assim, temos a seguinte dedução:*

P	*1*	$p \wedge q$
1,$\wedge$-el	*2*	p
2,$\vee$-int	*3*	$p \vee r$
1,$\wedge$-el	*4*	q
4,$\vee$-int	*5*	$q \vee s$
3,5$\wedge$-int	*6*	$(p \vee r) \wedge (q \wedge s)$

Observe o seguinte:

1. Estendemos o procedimento de rotulação das sentenças que ocorrem nas deduções, pela introdução de uma nova justificativa: "m,$\vee$-int", justificando que a sentença rotulada é obtida por aplicação de $\vee$-int a partir da sentença numerada por m.

2. $\vee$-int deve ser aplicada nos casos em que a disjunção ocorre como conclusão.

3. Em uma aplicação de $\vee$-int, *introduzimos* uma ocorrência do $\vee$. Por esta razão, $\vee$-int é também chamada a *Regra de Introdução do* $\vee$.

4. $\vee$-int é um exemplo da REGRA T.

5.2.7 Eliminação do $\vee$

Vamos agora decidir que passo devemos efetuar quando estivermos utilizando disjunções como premissas em deduções. Como estamos examinando premissas, devemos utilizar o Método de Análise. De acordo com o Método de Análise e as observações no final da Seção 5.2.1, quando queremos usar uma disjunção $\alpha \vee \beta$ como premissa, devemos nos perguntar que enunciado podemos deduzir imediatamente a partir de $\alpha \vee \beta$ que esteja diretamente relacionado com α e β.

Exemplo 19 *Tentativas imediatas de responder a esta questão nos levam ao seguinte:*

REGRA 1 *A partir de $\alpha \vee \beta$ podemos deduzir α.*

$$\frac{\alpha \vee \beta}{\alpha}$$

REGRA 2 *A partir de $\alpha \vee \beta$ podemos deduzir β.*

$$\frac{\alpha \vee \beta}{\beta}$$

Mas a REGRA 1 *e a* REGRA 2 *não são corretas, como mostra a tabela:*

α	β	$\alpha \vee \beta$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

De fato, na terceira linha da tabela $\alpha \vee \beta$ é V e α é F, o que mostra que a REGRA 1 *não é correta. E, na segunda linha da tabela, $\alpha \vee \beta$ é V e β é F, o que mostra que a* REGRA 2 *não é correta.*

Exemplo 20 *Uma tentativa correta, mas não adequada, seria:*

REGRA 3 *A partir de $\neg\alpha$ e $\alpha \vee \beta$ podemos deduzir β.*

A REGRA 3 *é correta, como mostra a tabela:*

α	β	$\neg\alpha$	$\alpha \vee \beta$	$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta)$	$\neg\alpha \wedge (\alpha \vee \beta) \rightarrow \beta$
V	V	F	V	F	V
V	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	V

Mas uma das premissas da regra, $\neg\alpha$ não é considerada relacionada com α e β de maneira tão imediata quanto se queria.

Uma regra que é ao mesmo tempo correta e adequada está diretamente associada ao modo como os matemáticos usam disjunções como premissas na prova de teoremas. Usualmente, quando estão fazendo a prova de um enunciado δ, a partir de certas premissas $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, e pretendem usar uma disjunção $\alpha \vee \beta$, os matemáticos fazem, o seguinte:

1. Assumem como premissa adicional que α é verdadeiro.
2. Usando α em conjunto com $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, provam δ.
3. Assumem agora como premissa adicional que β é verdadeiro.
4. Usando β em conjunto com $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, provam δ.

Se conseguem fazer isso, consideram que o enunciado δ está provado.

Exemplo 21 *Como já vimos anteriormente, um passo fundamental da prova do teorema que aparece na Seção 1.1 é a consideração do enunciado n* é primo ou n não é primo*, que é uma disjunção. Como nosso objetivo era provar que n* possui um fator primo*, a partir desta disjunção, dividimos a prova em duas partes: uma considerando que n* é primo *e a outra considerando que n* não é primo*. No primeiro caso, concluímos trivialmente que n possui um fator primo. No segundo, fornecemos uma explicação pormenorizada de como, após sucessivas fatorações, podemos encontrar um fator primo de n. Como em cada um dos casos fomos capazes de obter o resultado desejado, consideramos que o teorema está provado.*

Uma descrição intuitiva do procedimento esboçado acima, para o uso de disjunções como premissas na prova de teoremas, é imaginar a prova como a descrição de um caminho que parte das premissas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ e chega na conclusão δ. O uso de uma disjunção $\alpha \vee \beta$ como premissa na prova, deve ser comparado com a existência de uma bifurcação no caminho. Se quando deparamos com uma bifurcação, queremos ter certeza que o caminho nos leva a δ devemos mostrar que não importa que lado da bifurcação escolhamos, sempre chegaremos a δ. Uma maneira de fazer isso é mostrar que cada um dos lados da bifurcação nos leva necessariamente a δ.

Temos, então, a seguinte regra:

Regra da Prova por Casos, PC   Se, a partir de α podemos concluir δ e a partir de β podemos concluir δ, então a partir de $\alpha \vee \beta$ podemos concluir δ.

$$\text{Se } \frac{\alpha}{\delta} \text{ e } \frac{\beta}{\delta}, \text{ então } \frac{\alpha \vee \beta}{\delta}$$

Exemplo 22 *Vamos verificar a validade do seguinte argumento, utilizando* PC *em conjunto com as regras anteriores:*

$$\begin{array}{l} p \to (q \vee r) \\ p \wedge q \\ q \to (s \wedge v) \\ r \to (t \wedge v) \\ \hline v \end{array}$$

Queremos deduzir v. Segundo $\wedge$-el, isto pode ser feito tanto a partir de $s \wedge v$ quanto a partir de $t \wedge v$. Se temos q, podemos deduzir $s \wedge v$ a partir de $q \to (s \wedge v)$, aplicando MP. *Analogamente, se temos r, podemos deduzir $t \wedge v$ a partir de $r \to t \wedge v$, aplicando* MP. *As premissas do argumento não parecem garantir nem q nem r. Mas, se temos p, podemos deduzir $q \vee r$ a partir de $p \to (q \vee r)$, aplicando* MP. *E p pode ser deduzido a partir de $p \wedge q$, aplicando* $\wedge$-el. *Logo, temos $q \vee r$ e, portanto, podemos aplicar* PC. *Assim, temos a dedução:*

P	*1*	$p \to (q \vee r)$
P	*2*	$p \wedge s$
P	*3*	$q \to (s \wedge v)$
P	*4*	$r \to t \wedge v$
2,$\wedge$-el	*5*	p
1,5,MP	*6*	$q \vee r$
6,H,PC	*7*	q
3,7,MP	*8*	$s \wedge v$
8,$\wedge$-el	*9*	v
6,H,PC	*10*	r
4,10,MP	*11*	$t \wedge v$
11,$\wedge$-el	*12*	v
7,9,10,12,PC	*13*	v

Observe o seguinte:

1. Estendemos o procedimento de rotulação das sentenças que ocorrem nas deduções, pela introdução de duas novas justificativas:

   1.a. "m,H,PC", justificando que a sentença rotulada é uma premissa adicional, introduzida pelo uso de PC, aplicada a uma disjunção numerada por m;

   1.b. "m_1,n_1,m_2,n_2,PC", justificando que a sentença rotulada (que é a mesma numerada por n_1 e n_2) foi obtida a partir de uma disjunção cuja primeira componente é a sentença numerada por m_1 e a segunda componente é a sentença numerada por m_2.

2. PC deve ser usada nos casos em que a disjunção ocorre como premissa.

3. Em uma aplicação de PC, *eliminamos* uma ocorrência do $\vee$. Por esta razão, PC é também chamada *Regra de Eliminação do* $\vee$.

4. PC não é um exemplo da Regra T, pois não estipula diretamente a dedução de δ a partir de $\alpha \vee \beta$. Mas afirma que podemos considerar δ deduzida se efetuarmos duas deduções de δ. Uma tomando α como premissa adicional e a outra tomando β como premissa adicional. Assim, em toda dedução feita por aplicação de PC, ocorre necessariamente a seguinte estrutura:

$$
\begin{array}{r|ll|}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{2}{l}{\vdots} \\
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{l}{m} & \multicolumn{1}{l}{\alpha \vee \beta} \\
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{2}{l}{\vdots} \\
\cline{2-3}
m\text{,H,PC} & m_1 & \alpha \\
 & \vdots & \\
 & n_1 & \delta \\
\cline{2-3}
m\text{,H,PC} & m_2 & \beta \\
 & \vdots & \\
 & n_2 & \delta \\
\cline{2-3}
\multicolumn{1}{r}{m_1,n_1,m_2,n_2\text{,PC}} & \multicolumn{1}{l}{n} & \multicolumn{1}{l}{\delta} \\
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{2}{l}{\vdots}
\end{array}
$$

A parte que está dentro do primeiro retângulo é a dedução de δ a partir de α. A parte que está dentro do segundo retângulo é a dedução de δ a partir de β. Cada uma das partes pode ser feita para que justifiquemos δ a partir de $\alpha \vee \beta$, aplicando PC. Dentro de cada retângulo ou fora dele, podem ocorrer outras aplicações de PC.

5.2.8 Eliminação do $\neg$

Vamos agora decidir que passo devemos efetuar quando estivermos utilizando negações como premissas em deduções. Como estamos examinando premissas, devemos utilizar o Método de Análise. De acordo com o Método de Análise e com as observações no final da Seção 5.2.1, quando queremos usar uma negação $\neg\alpha$ como premissa, devemos nos perguntar que enunciado podemos deduzir imediatamente a partir de $\neg\alpha$ que esteja diretamente relacionado com α.

Exemplo 23 *Uma tentativas imediata de responder a esta questão nos leva ao seguinte:*

REGRA 1 *A partir de $\neg\alpha$ podemos deduzir α.*

$$\frac{\neg\alpha}{\alpha}$$

Mas a REGRA 1 *não é correta, como mostra a tabela:*

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

De fato, na segunda linha da tabela, $\neg\alpha$ é V e α é F, o que mostra que a REGRA 1 *não é correta.*

Assumir $\neg\alpha$ como premissa é supor que α é falsa. Assim, não parece existir nenhuma informação diretamente relacionada a α que possamos garantir ser verdadeira a partir de $\neg\alpha$. A idéia é, então, examinar como premissas negações que nos garantam a verdade de α. Isto pode ser feito se examinarmos $\neg\neg\alpha$.

Temos, então, a seguinte regra:

Regra da Dupla negação, DN A partir de $\neg\neg\alpha$, podemos concluir α.

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

Exemplo 24 *Vamos verificar a validade do seguinte argumento, utilizando* DN *em conjunto com as outras regras:*

$$\begin{array}{l} p \vee \neg q \\ p \rightarrow \neg r \\ \neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg r) \\ \neg r \rightarrow \neg\neg q \\ \hline \neg r \rightarrow q \end{array}$$

Como queremos deduzir $\neg r \rightarrow q$*, aplicando* TD*, devemos acrescentar* $\neg r$ *como premissa adicional e deduzir* q*. Ou seja, passar para o argumento:*

$$\begin{array}{l} p \vee \neg q \\ p \rightarrow \neg r \\ \neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg r) \\ \neg r \rightarrow \neg\neg q \\ \neg r \\ \hline q \end{array}$$

Como $\neg r \rightarrow \neg\neg q$ *é uma premissa e* r *é a premissa adicional, basta aplicar* MP *e deduzir* $\neg\neg q$*. Aplicando* DN*, temos, finalmente,* q*. Assim, temos a dedução:*

$$\begin{array}{rll} P & 1 & p \vee \neg q \\ P & 2 & p \rightarrow \neg r \\ P & 3 & \neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg r) \\ P & 4 & \neg r \rightarrow \neg\neg q \\ H,\mathrm{TD} & 5 & \neg r \\ 4,5,\mathrm{MP} & 6 & \neg\neg q \\ 6,\mathrm{DN} & 7 & q \\ 5,7,\mathrm{TD} & 8 & \neg \rightarrow q \end{array}$$

Note que as premissas $p \vee \neg q$*,* $p \rightarrow \neg r$ *e* $\neg q \rightarrow (r \rightarrow \neg r)$*, que sugerem o uso de* PC*, não foram utilizadas na dedução acima.*

Observe o seguinte:

1. Estendemos o procedimento de rotulação das sentenças que ocorrem nas deduções, pela introdução do uma nova justificativa: "m, DN", justificando que a sentença rotulada é obtida por aplicação de DN a partir da sentença numerada por m.

2. DN deve ser aplicada nos casos em que a negação ocorre como premissa.

3. Em uma aplicação da DN, *eliminamos* duas ocorrências do $\neg$. Por esta razão, DN é também chamada *Regra de Eliminação do* $\neg$.

4. DN é um exemplo da REGRA T.

5.2.9 Introdução do $\neg$

Vamos agora decidir que passo devemos efetuar quando estivermos deduzindo negações como conclusões. Como estamos examinando conclusões, devemos utilizar o Método de Síntese. De acordo com o Método de Síntese e com as observações no final da Seção 5.2.1, devemos nos perguntar que enunciado que esteja diretamente relacionado com α devemos ter como premissa adicional para que possamos deduzir imediatamente $\neg\alpha$.

Exemplo 25 *Tentativas imediatas de responder a esta questão nos levam ao seguinte:*

REGRA 1 *A partir de* α *podemos deduzir* $\neg\alpha$.

$$\frac{\alpha}{\neg\alpha}$$

Mas a REGRA 1 *não é correta, como mostra a tabela:*

α	$\neg\alpha$
V	F
F	V

De fato, na primeira linha da tabela α *é* V *e* $\neg\alpha$ *é* F*, o que mostra que a* REGRA 1 *não é correta.*

Uma regra que é ao mesmo tempo correta e adequada está diretamente associada ao modo como os matemáticos provam teoremas que são negações. Usualmente, para provar uma negação a partir de certas premissas os matemáticos utilizam o chamado *método de prova por redução ao absurdo*. Este método pode ser descrito sucintamente do seguinte modo:

1) Temos um determinado enunciado β que queremos provar, a partir dos enunciados $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$.

$$\boxed{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m} \Rightarrow \boxed{\beta}$$

2) Ao invés de tentarmos combinar a informação contida em $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ de modo a justificar β diretamente, acrescentamos a $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ o enunciado $\neg\beta$, ou seja, a negação do que queremos provar.

$$\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \neg\beta}$$

3) Consideramos que, quando podemos provar β a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ a verdade de β é assegurada pela verdade de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Logo, se podemos provar β a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, de algum modo a informação expressa em $\neg\beta$ deve entrar em conflito com a informação expressa em $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Assim, raciocinamos sobre $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \neg\beta$ tentando encontrar alguma informação $\neg\delta$ que contradiga alguma informação δ já obtida anteriormente.

$$\boxed{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \neg\beta} \Rightarrow \boxed{\delta, \neg\delta}$$

4) Se realmente isto acontecer, consideramos que o enunciado β está provado a partir dos enunciados α_1,α_2,...,α_m.

Exemplo 26 *Um exemplo clássico do uso do método de redução ao absurdo na prova de um enunciado matemático é a prova de que* $\sqrt{2}$ *não é um número racional.*

A prova se baseia nos seguintes fatos:

i) Todo número racional positivo pode ser escrito como uma fração de dois números naturais a e b, com $b \neq 0$*. Por exemplo, o número racional* $0,5$ *pode ser escrito como a fração* $5/10$*.*

ii) Toda fração a/b *de dois números naturais pode ser simplificada até uma fração* c/d*, pela eliminação de todos os fatores comuns aos números a e b. Por exemplo,* $5/10$ *pode ser simplificada até a fração* $1/2$*, onde* 1 *e* 2 *não possuem fatores comuns.*

iii) Todo número natural é par ou ímpar, de maneira exclusiva. Os números pares podem ser escritos na forma $2m$*, onde m é um número natural. Os números ímpares podem ser escritos na forma* $2n+1$*, onde n é um número natural.*

iv) O quadrado de um número ímpar é ímpar. De fato, se $a = 2n+1$ *é um número ímpar,* $a^2 = 4n^2+4n+1 = 2(2n^2+2n)+1$ *também é um número ímpar. Assim, se o quadrado de um número é par, então esse número é par.*

Podemos agora provar o seguinte resultado:

Proposição 5.2 *$\sqrt{2}$ não é um número racional.*

Prova: *Suponhamos a negação do que queremos provar, ou seja, que $\sqrt{2}$ é um número racional. Daí, existem números racionais a e b, com $b \neq 0$, tais que $\sqrt{2} = a/b$. Simplificando a fração a/b, temos que $\sqrt{2} = c/d$, onde:*

c e d não possuem fatores comuns. (*)

Elevando ambos os membros da igualdade ao quadrado, temos que $2 = c^2/d^2$, ou seja:

$$c^2 = 2d^2 \quad (1)$$

e daí, concluímos que c^2 é par. Daí:

$$c^2 = 2m \quad (2)$$

onde m é um número natural. Substituindo (2) em (1), temos: $(2m)^2 = 2d^2$ e, daí, $4m^2 = 2d^2$, ou seja, $2m^2 = d^2$ e concluímos que d^2 é par. Como d^2 é par, podemos garantir que d é par e , daí, $d = 2n$, onde n é um número natural. Assim, $c = 2m$ e $d = 2n$, acarretando que c e d possuem 2 como um fator comum, contradizendo (*). ■

No caso que estamos considerando, queremos deduzir uma negação $\neg\alpha$ a partir de premissas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Assim, pelo método de redução ao absurdo, devemos supor como premissa adicional a negação do que queremos deduzir, ou seja, $\neg\neg\alpha$, e deduzir uma contradição expressa pelas sentenças β e $\neg\beta$. Observe que $\neg\neg\alpha$ é, na verdade, tautologicamente equivalente a α.

Portanto, para deduzir uma negação $\neg\alpha$ a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, seguindo a maneira como os matemáticos provam teoremas, faremos o seguinte:

1. Assumiremos α como premissa adicional.

2. Usando α em conjunto com $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, tentaremos deduzir dois enunciados contraditórios β e $\neg\beta$.

Se conseguirmos fazer isso, consideraremos que a negação foi deduzida.

Temos, então, a seguinte regra:

Regra de Redução ao absurdo, RA Se a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha$ podemos deduzir β e a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha$ também podemos deduzir $\neg\beta$, então a partir de $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ podemos deduzir $\neg\alpha$.

$$\text{Se } \frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha}{\beta} \text{ e } \frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \alpha}{\neg\beta}, \text{ então } \frac{\alpha_1, \ldots, \alpha_m}{\neg\alpha}$$

Exemplo 27 *Vamos verificar a validade do seguinte argumento, aplicando* RA *em conjunto com as outras regras:*

$$\begin{array}{c} p \rightarrow q \\ \underline{r \rightarrow \neg q} \\ p \rightarrow \neg r \end{array}$$

Como queremos deduzir $p \rightarrow \neg r$, aplicando TD*, devemos acrescentar p como premissa adicional e deduzir $\neg r$. Como $\neg r$ é uma negação, aplicando* RA*, devemos acrescentar r como mais uma premissa adicional e deduzir sentenças contraditórias β e $\neg \beta$. As candidatas naturais para β e $\neg \beta$ são q e $\neg q$ que podem ser deduzidas a partir de $p \rightarrow q$ e $r \rightarrow \neg q$ por aplicação de* MP *a p e r, respectivamente. Assim, temos a dedução:*

$$\begin{array}{rcl} P & 1 & p \rightarrow q \\ P & 2 & r \rightarrow \neg q \\ H,\mathrm{TD} & 3 & p \\ H,\mathrm{RA} & 4 & r \\ 1,3,\mathrm{MP} & 5 & q \\ H,\mathrm{RA} & 6 & r \\ 2,6,\mathrm{MP} & 7 & \neg q \\ 4,5,6,7,\mathrm{RA} & 8 & \neg r \\ 3,8,\mathrm{TD} & 9 & p \rightarrow \neg r \end{array}$$

Observe o seguinte:

1. Estendemos o procedimento de rotulação das sentenças que ocorrem nas deduções, pela introdução de duas novas justificativas:

   1.a. "H,PC", justificando que a sentença rotulada é uma premissa adicional, introduzida pelo uso de RA;

   2.a. "m_1,n_1,m_2,n_2,RA", justificando que a sentença rotulada (que é a negação da sentença numerada por m_1 e m_2) foi obtida pela dedução de uma contradição expressa pelas sentenças numeradas por n_1 e n_2.

2. RA deve ser utilizada nos casos em que a negação ocorre como conclusão.

3. Em uma aplicação de RA, *introduzimos* uma ocorrência do $\neg$. Por esta razão, RA é também chamada *Regra de Introdução do* $\neg$.

4. RA não é um exemplo da Regra T, pois não estipula diretamente a dedução de $\neg \alpha$ a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Mas afirma que podemos considerar $\neg \alpha$ deduzida se efetuarmos duas deduções tomando α como premissa adicional: uma de β e a outra de $\neg \beta$. Assim, em toda dedução feita por aplicação de RA, ocorre necessariamente a seguinte estrutura:

$$\begin{array}{r|ll|}
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{l}{\vdots} & \multicolumn{1}{l}{} \\ \cline{2-3}
\text{H,RA} & m_1 & \alpha \\
 & \vdots & \\
 & n_1 & \beta \\ \cline{2-3}
\text{H,RA} & m_2 & \alpha \\
 & \vdots & \\
 & n_2 & \neg\beta \\ \cline{2-3}
\multicolumn{1}{r}{m_1,n_1,m_2,n_2,\text{RA}} & \multicolumn{1}{l}{n} & \multicolumn{1}{l}{\neg\alpha} \\
\multicolumn{1}{r}{} & \multicolumn{1}{l}{\vdots} & \multicolumn{1}{l}{}
\end{array}$$

A parte que está dentro do primeiro retângulo é a dedução de β a partir de α. A parte que está dentro do segundo retângulo é a dedução de $\neg\beta$ a partir de α. Cada uma das partes pode ser feita para que justifiquemos $\neg\alpha$ a partir de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, aplicando RA. Dentro de cada retângulo ou fora dele, podem ocorrer outras aplicações de RA.

5.2.10 Eliminação do $\leftrightarrow$

Vamos agora decidir que passo devemos efetuar quando estivermos utilizando implicações como premissas em deduções. Como estamos examinando premissas, devemos utilizar o Método de Análise. De acordo com o Método de Análise e com as observações no final da Seção 5.2.1, quando queremos utilizar uma implicação $\alpha \leftrightarrow \beta$ como premissa, devemos nos perguntar que enunciado podemos deduzir imediatamente a partir de $\alpha \leftrightarrow \beta$ que esteja diretamente relacionado com α e β.

Tentativas imediatas de responder a esta questão nos levam ao seguinte:

Exemplo 28 *Temos as seguintes regras:*

REGRA 1 *A partir de $\alpha \leftrightarrow \beta$ podemos deduzir α.*

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha}$$

REGRA 2 *A partir de $\alpha \leftrightarrow \beta$ podemos deduzir β.*

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta}$$

Mas a REGRA 1 *e a* REGRA 2 *não são corretas, como mostra a tabela:*

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De fato, na quarta linha da tabela, $\alpha \leftrightarrow \beta$ é V e α é F, mostrando que a Regra 1 *não é correta. Analogamente, na quarta linha da tabela, $\alpha \leftrightarrow \beta$ é V e β é F, mostrando que a* Regra 2 *não é correta.*

Uma regra que é, ao mesmo tempo, adequada e correta decorre da tendência natural de considerar uma biimplicação como uma conjunção de duas implicações, ou seja, de considerar $\alpha \leftrightarrow \beta$ como $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$.

Neste caso, as tentativas imediatas são as seguintes:

Regra de eliminação do $\leftrightarrow$, $\leftrightarrow$ -el   Temos as seguintes regras:

a) A partir $\alpha \leftrightarrow \beta$, podemos concluir $\alpha \to \beta$.

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \to \beta}$$

b) A partir $\alpha \leftrightarrow \beta$, podemos concluir $\beta \to \alpha$.

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \to \alpha}$$

As regras $\leftrightarrow$ -el estão corretas, como mostra a tabela:

α	β	$\alpha \to \beta$	$\beta \to \alpha$	$\alpha \leftrightarrow \beta$	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\alpha \to \beta)$	$(\alpha \leftrightarrow \beta) \to (\beta \to \alpha)$
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Não escolhemos apenas uma entre as duas possibilidades imediatas na eliminação do $\leftrightarrow$ porque a verdade da biimplicação acarreta a verdade das duas implicações e não apenas a verdade de uma delas.

Exemplo 29 *Vamos verificar a validade do seguinte argumento, utilizando* $\leftrightarrow$ -el *em conjunto com as outras regras:*

$$\begin{array}{l} p \wedge q \to \neg r \\ \neg r \to s \\ s \wedge t \\ p \leftrightarrow q \\ \hline p \to s \end{array}$$

Como queremos deduzir $p \to s$*, aplicando* TD*, devemos acrescentar* p *como premissa adicional e deduzir* r*. Ou seja, passar para o seguinte argumento:*

$$\begin{array}{l} p \wedge q \to \neg r \\ \neg r \to s \\ s \wedge t \\ p \leftrightarrow q \\ \underline{p \qquad\qquad} \\ s \end{array}$$

Queremos deduzir s*, e* $\neg r \to s$ *é uma premissa. Segundo* MP*, basta deduzir* $\neg r$*. Como* $p \wedge q \to \neg r$ *é uma premissa, segundo* MP*, para deduzir* $\neg r$ *basta deduzir* $p \wedge q$*. Para isto, segundo* $\wedge$-el*, basta deduzir* p *e deduzir* q*. Agora,* p *é a premissa adicional. Como temos* $p \leftrightarrow q$ *como premissa, segundo* $\leftrightarrow$ -el*, podemos deduzir* $p \to q$*. Temos, agora,* p *e* $p \to q$*. Daí, aplicando* MP*, podemos deduzir* q*. Temos, então, a seguinte derivação:*

P	*1*	$p \wedge q \to \neg r$
P	*2*	$\neg r \to s$
P	*3*	$s \wedge t$
P	*4*	$p \leftrightarrow q$
*H,*TD	*5*	p
4,$\leftrightarrow$ -el	*6*	$p \to q$
*5,6,*MP	*7*	q
5,7,$\wedge$-el	*8*	$p \wedge q$
*1,8,*MP	*9*	$\neg r$
*2,9,*MP	*10*	s
*5,10,*TD	*11*	$p \to s$

Observe o seguinte:

1. Estendemos o procedimento de rotulação das sentenças que ocorrem nas deduções, pela introdução de uma nova justificativa: "m,$\leftrightarrow$ -el", justificando que a sentença rotulada é obtida da sentença numerada por m por aplicação de $\leftrightarrow$ -el.

2. $\leftrightarrow$ -el deve ser usada nos casos em que a biimplicação ocorre como hipótese.

3. Em uma aplicação de $\leftrightarrow$ -el, *eliminamos* uma ocorrência do $\leftrightarrow$. Por esta razão, $\leftrightarrow$ -el é chamada *Regra de Eliminação do* $\leftrightarrow$.

5. $\leftrightarrow$ -el é um exemplo da Regra T.

5.2.11 Introdução do $\leftrightarrow$

Vamos agora decidir que passo devemos efetuar quando estivermos deduzindo biimplicações como conclusões. Como estamos examinando conclusões, devemos utilizar o Método de Síntese. De acordo com o Método de Síntese e com as observações no final da

Seção 5.2.1, devemos nos perguntar que enunciados diretamente relacionados com α e β devemos ter como premissas para que possamos deduzir imediatamente $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Tentativas imediatas de responder a esta questão nos levam ao seguinte:

Exemplo 30 *Temos as seguintes regras:*

REGRA 1 *A partir de α podemos deduzir $\alpha \leftrightarrow \beta$.*

$$\frac{\alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta}$$

REGRA 2 *A partir de β podemos deduzir $\alpha \leftrightarrow \beta$.*

$$\frac{\beta}{\alpha \leftrightarrow \beta}$$

Mas a REGRA 1 *e a* REGRA 2 *não são corretas, como mostra a tabela:*

α	β	$\alpha \leftrightarrow \beta$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

De fato, na segunda linha da tabela, α é V e $\alpha \leftrightarrow \beta$ é F, mostrando que a REGRA 1 *não é correta. E, na terceira linha da tabela, β é V e $\alpha \leftrightarrow \beta$ é F, mostrando que a* REGRA 2 *não é correta.*

Como no caso de $\leftrightarrow$ -el, uma regra qua é ao mesmo tempo adequada e correta decorre do fato de considerarmos uma biimplicação como uma conjunção de duas implicações.

REGRA DE INTRODUÇÃO DO $\leftrightarrow$, $\leftrightarrow$ -int A partir $\alpha \to \beta$ e $\beta \to \alpha$, podemos concluir $\alpha \leftrightarrow \beta$.

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha \to \beta \\ \beta \to \alpha\end{array}}{\alpha \leftrightarrow \beta}$$

A regra $\leftrightarrow$ -int é correta, como mostra a tabela:

α	β	$\alpha \to \beta$	$\beta \to \alpha$	$\alpha \leftrightarrow \beta$	$(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha)$	δ
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

onde δ é $(\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha) \to (\alpha \leftrightarrow \beta)$.

Exemplo 31 *Vamos verificar a validade do seguinte argumento, utilizando* $\leftrightarrow$ -int *em conjunto com as outras regras:*

$$\begin{array}{l} p \\ p \wedge s \to t \\ p \wedge t \to q \\ q \to s \\ \hline s \leftrightarrow t \end{array}$$

Queremos deduzir $s \leftrightarrow t$. Segundo $\leftrightarrow$ -int, *devemos deduzir, então, $s \to t$ e $t \to s$. Ou seja, passar para os argumentos:*

$$\begin{array}{l} p \\ p \wedge s \to t \\ p \wedge t \to q \\ q \to s \\ \hline s \to t \end{array} \quad e \quad \begin{array}{l} p \\ p \wedge s \to t \\ p \wedge t \to q \\ q \to s \\ \hline t \to s \end{array}$$

Para deduzir $s \to t$, aplicando TD, *devemos considerar s como premissa adicional e deduzir t. Ou seja, passar para o argumento:*

$$\begin{array}{l} p \\ p \wedge s \to t \\ p \wedge t \to q \\ q \to s \\ s \\ \hline t \end{array}$$

Mas p é uma premissa. Daí, aplicando $\wedge$-int, *temos $p \wedge s$. Como $p \wedge s \to t$ é uma premissa, aplicando* MP, *temos t. Para deduzir $t \to s$, aplicando* TD, *devemos considerar t como premissa adicional e deduzir s. Ou seja, passar para o argumento:*

$$\begin{array}{l} p \\ p \wedge s \to t \\ p \wedge t \to q \\ q \to s \\ t \\ \hline s \end{array}$$

Mas p é uma premissa. Daí, aplicando $\wedge$-int, *temos $p \wedge t$. Como $p \wedge t \to q$ é uma premissa, aplicando* MP, *temos q. Agora que temos q e $q \to s$, aplicando* MP, *temos s. Assim, temos a seguinte derivação:*

$$\begin{array}{rll}
P & 1 & p \\
P & 2 & p \wedge s \to t \\
P & 3 & p \wedge t \to q \\
P & 4 & q \to s \\
H,\text{TD} & 5 & s \\
1,5,\wedge\text{-int} & 6 & p \wedge s \\
2,6,\text{MP} & 7 & t \\
5,7,\text{TD} & 8 & s \to t \\
H,\text{TD} & 9 & t \\
1,4,\wedge\text{-int} & 10 & p \wedge t \\
3,10,\text{MP} & 11 & q \\
4,11,\text{MP} & 12 & s \\
9,12,\text{TD} & 13 & t \to s \\
8,13,\leftrightarrow\text{-int} & 14 & s \leftrightarrow t
\end{array}$$

Observe o seguinte:

1. Estendemos o procedimento de rotulação das sentenças que ocorrem nas deduções, pela introdução de uma nova justificativa: "m,n,$\leftrightarrow$ -int", justificando que a sentença rotulada é obtida das sentenças numeradas por m e n por aplicação de $\leftrightarrow$ -int.
2. $\leftrightarrow$ -int deve ser usada nos casos em que a biimplicação ocorre como conclusão.
3. Em uma aplicação de $\leftrightarrow$ -int, *introduzimos* uma ocorrência do $\leftrightarrow$. Por esta razão, $\leftrightarrow$ -int é chamada *Regra de Introdução do* $\leftrightarrow$.
4. $\leftrightarrow$ -int é um exemplo da REGRA T.

5.2.12 Eliminação do $\forall$

A eliminação do $\forall$ se baseia no seguinte princípio que descreve intuitivamente o significado da generalização de enunciados:

> *Se todos os elementos de um domínio têm uma certa propriedade, então devemos ser capazes de deduzir que qualquer elemento particular do domínio tem a propriedade.*

Exemplo 32 *Vamos verificar a validade dos seguintes argumentos, utilizando o princípio acima:*

a) Sócrates é mortal.
Pois, Sócrates é homem.
E todos os homens são mortais.

$$\begin{array}{rll}
P & 1 & P(a) \\
P & 2 & \forall x(P(x) \to Q(x)) \\
2,\textit{Princípio} & 3 & P(a) \to Q(a) \\
1,3,\text{MP} & 4 & Q(a)
\end{array}$$

onde:

$P(x)$	:	x é homem
$Q(x)$	:	x é mortal
a	:	Sócrates

b) Todos os gatos têm rabo.
O irmão de Psi não tem rabo.
Logo, o irmão de Psi não é um gato.

P	1	$\forall x(R(x) \to S(x))$
P	2	$\neg S(f(b))$
1,*Princípio*	3	$R(f(b)) \to S(f(b))$
H	4	$R(f(b))$
$3, 4, \text{MP}$	5	$S(f(b))$
$2, 5, \wedge\text{-int}$	6	$S(f(b)) \wedge \neg S(f(b))$
$4, 6, \neg\text{-int}$	7	$\neg R(f(b))$

onde:

$R(x)$	:	x é gato
$S(x)$	:	x tem rabo
$f(x)$	:	o irmão de x
b	:	Psi

Se temos um propriedade $P(x)$ expressa por um enunciado $\alpha(x)$ e sua generalização expressa pelo enunciado $\forall x\alpha(x)$, considerando que $\forall x\alpha(x)$ é um enunciado verdadeiro em um dado contexto, dado um objeto a qualquer, do domínio de discurso, se a é denotado por um termo t do CQ, o princípio acima nos autoriza a executar os seguintes passos:

Passo 1) Eliminar a ocorrência de $\forall x$ em $\forall x\alpha(x)$.

Passo 2) Inferir que o enunciado $\alpha(x)$ vale para o termo t.

Ou seja, que o elemento específico a, do domínio, possui a propriedade $P(x)$.

Exemplo 33 *Nos exemplos anteriores, temos:*

a) *$P(x)$ é a propriedade* homens são mortais *expressa pelo enunciado $P(x) \to Q(x)$, cuja generalização é $\forall x(P(x) \to Q(x))$. O elemento considerado é* Sócrates *denotado pelo termo a.*

Assumindo $\forall x(P(x) \to Q(x))$ como premissa, a regra de eliminação do $\forall$ nos autoriza a executar os seguintes passos:

Passo 1) *Eliminar a ocorrência de $\forall x$ em $\forall x(P(x) \to Q(x))$, obtendo o enunciado $P(x) \to Q(x)$.*

Passo 2) *Trocar as ocorrências de x em $P(x) \to Q(x)$ por ocorrências do termo a, obtendo $P(a) \to Q(a)$.*

O Passo 1 e o Passo 2 acima são resumidos na passagem do passo 2 para o passo 3 na derivação apresentada.

b) *$P(x)$ é a propriedade* gatos têm rabo*, expressa pelo enunciado $R(x) \to S(x)$, cuja generalização é $\forall x(R(x) \to S(x))$. O elemento considerado é* o irmão de Psi*, denotado pelo termo $f(b)$.*

Assumindo $\forall x(R(x) \to S(x))$ como premissa, a regra de eliminação do $\forall$ nos autoriza a executar os seguintes passos, análogos aos efetuado no item (a):

PASSO 1) *Eliminar a ocorrência de $\forall x$ em $\forall x(R(x) \to S(x))$, obtendo $R(x) \to S(x)$.*

PASSO 2) *Trocar as ocorrências de x em $R(x) \to S(x)$ por ocorrências do termo $f(b)$, obtendo $R(f(b)) \to S(f(b))$.*

O Passo 1 e o Passo 2 acima são resumidos na passagem do passo 1 para o passo 3 na derivação apresentada.

Nosso objetivo é usar o princípio acima para enunciar formalmente a regra de eliminação do $\forall$. Para isto, necessitamos do seguinte conceito de substituição de uma variável por um termo em um enunciado:

Definição 5.2 *Seja x uma variável, t um termo e α um enunciado do* CQ. Substituir x *por t em α consiste em trocar simultaneamente todas as ocorrências livres de x em α (se existirem) por ocorrências de t.*

Notação O resultado da substituição de x por t em α é um enunciado denotado $(t/x)\alpha$ e lido *t no lugar de x em α.*

Observe que, segundo a definição acima, a noção de substituição de uma variável x por um termo t em um enunciado α está sujeita às seguintes restrições:

i) Somente as ocorrências livres de x em α (se existirem) podem ser trocadas por ocorrências de t.

Exemplo 34 *Formalmente, como α é um enunciado qualquer do* CQ*, teremos as seguintes possibilidades:*

a) Não existem ocorrências de x em α. Por exemplo, α pode ser $P(y)$. Neste caso, $(t/x)\alpha$ é o próprio α, uma vez que, na ausência de ocorrências livres de x em α, nenhuma substituição é efetuada. Assim, $(a/x)P(y)$ é a própria $P(y)$.

b) Todas as ocorrências de x em α são ligadas. Por exemplo, α pode ser $\forall xP(x)$. Neste caso, $(t/x)\alpha$ é novamente o próprio α, uma vez que, na ausência de ocorrências livres de x em α, nenhuma substituição é efetuada. Assim, o enunciado $(a/x)\forall xP(x)$ é o próprio $\forall xP(x)$.

c) *Todas as ocorrências de x em α são livres. Por exemplo, α pode ser $P(x)$. Neste caso, a substituição é efetuada em todos os lugares onde x ocorre livre em α. Assim, $(a/x)P(x)$ é $P(a)$.*

d) *Algumas ocorrências de x em α são livres e outras são ligadas. Por exemplo, α pode ser $P(x) \wedge \forall x P(x)$. Neste caso, a substituição é efetuada somente nos lugares onde x ocorre livre em α. Assim, $(a/x)(P(x) \wedge \forall x P(x))$ é $P(a) \wedge \forall x P(x)$.*

ii) Todas as ocorrências livres de x em α devem ser trocadas por ocorrências de t.

Exemplo 35 *Se α é $P(x,y) \wedge P(y,x)$, então $(a/x)\alpha$ é $P(a,y) \wedge P(y,a)$ e não, por exemplo, $P(a,y) \wedge P(y,x)$ ou $P(x,y) \wedge P(y,a)$.*

Feitas estas ressalvas, temos a seguinte regra:

Regra de eliminação do $\forall$ ($\forall$-el, primeira versão) Dado um termo t, a partir de Σ e $\forall x\alpha$, podemos concluir $(t/x)\alpha$.

$$\begin{array}{l} \Sigma \\ \forall x\alpha \\ \hline (t/x)\alpha \end{array}$$

O leitor deve estar convencido de que a regra acima traduz corretamente a noção intuitiva de eliminação do $\forall$. Mas, do ponto de vista formal, como veremos no próximo exemplo, ela deixa um pouco a desejar.

Exemplo 36 *Verificar a validade do seguinte argumento, no* CQ*:*

Existe um inteiro diferente de si mesmo.
Pois y é um inteiro
e sempre existe um inteiro diferente de um inteiro dado.

O argumento acima é obviamente inválido, pois pode ser interpretado na aritmética usual dos números naturais de modo que a premissa seja V e conclusão F.

Agora, o argumento pode ser simbolizado do seguinte modo, no CQ*:*

$$\begin{array}{l} P(y) \\ \forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \wedge y \neq x)) \\ \hline \exists y(P(y) \wedge y \neq y) \end{array}$$

onde $P(x)$ simboliza x é um inteiro*. Utilizando a regra* $\forall$-el *(primeira versão), podemos efetuar a seguinte derivação:*

P	1	$P(y)$
P	2	$\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \land y \neq x))$
$2, \forall$-el*(primeira versão)*	3	$P(y) \to \exists y(P(y) \land y \neq y)$
$1, 3, \mathrm{MP}$	4	$\exists y(P(y) \land y \neq y)$

que mostra que o argumento é válido.

O ponto crucial na derivação acima é a passagem do passo 2 para o passo 3, onde eliminamos a ocorrência de $\forall x$ *em* $\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \land y \neq x))$ *e substituímos as ocorrências livres de* x *em* $P(x) \to \exists y(P(y) \land y \neq x))$ *por ocorrências do termo* y*, obtendo:*

$$P(y) \to \exists y(P(y) \land y \neq y).$$

Neste ponto, passamos do enunciado sempre existe um inteiro diferente de um inteiro dado*, que é* V*, para o enunciado* se algo é um inteiro, então existe um inteiro diferente de si mesmo*. Como* y é um inteiro *é uma premissa, concluímos o enunciado* existe um inteiro diferente de si mesmo*, que é* F*.*

Como vimos, ao estudar o uso de regras de inferência no CS, uma das principais propriedades das regras de inferência é que elas devem *preservar a verdade*, ou seja, sempre que aplicadas a enunciados V, devem fornecer como resultado um enunciado V. No nosso exemplo, no entanto, no passo 2, temos um enunciado V e, no passo 4, obtemos com aplicação de $\forall$-el (primeira versão) um enunciado F.

Concluímos, então que $\forall$-el (primeira versão) não preserva a verdade, quando aplicada a enunciados do CQ, isto é, existe ao menos um enunciado α do CQ e um contexto onde $\forall x\alpha$ é V mas $(t/x)\alpha$ é F. Por esta razão, $\forall$-el (primeira versão) não pode ser aceita como regra de inferência do CQ. Qual será então o aspecto da eliminação do $\forall$ que a regra acima não capturou, permitindo a anomalia acima? Para responder a esta questão, faremos um exame detalhado da passagem efetuada do passo 2 para o passo 4, na derivação.

Iniciamente, temos o enunciado:

$$(1)\ \forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \land y \neq x))$$

que significa sempre existe um inteiro diferente de um inteiro dado e, portanto, é V, na aritmética dos números inteiros.

Em (1) eliminamos a ocorrência do $\forall x$, obtendo o enunciado:

$$(2)\ P(x) \to \exists y(P(y) \land y \neq x)$$

que siginifica se x é um inteiro, existe um inteiro diferente de x que também é V, na aritmética dos números inteiros.

Agora, em (2) efetuamos a substituição de todas as ocorrências livres de x pelo termo y. Como todas as ocorrências de x em (2) são livres, todas devem ser trocadas por y e obtemos:

$$(3)\ P(y) \to \exists y(P(y) \wedge y \neq y)$$

que significa se y é um inteiro, existe um inteiro diferente de si mesmo que é F, na aritmética dos números inteiros, já que admitimos como premissa que y é inteiro.

Observe que, em relação à substituição de x por y, as ocorrências livres de x em (2) são de dois tipos. A primeira não ocorre no escopo de nenhum quantificador e, portanto, quando substituída não pode se tornar ligada. E a segunda ocorre no escopo de um quantificador $\forall y$ e, portanto, passa a se tornar ligada quando a substituição de x por y é efetuada. Acontece que o fato da substituição trocar uma variável livre por uma variável ligada altera essencialmente a forma do enunciado em questão e, conseqüentemente, o seu conteúdo.

Exemplo 37 *Considere o enunciado V, na aritmética dos números inteiros:*

Existe um inteiro maior que um inteiro dado.

Este enunciado pode ser simbolizado no CQ *como:*

$$(*)\ \exists y(P(y) \wedge Q(y, x)),$$

onde $P(y)$ e $Q(y, x)$ simbolizam, respectivamente, y é um inteiro *e* y é maior que x.

a) Substituindo x por y em (*), teremos:

$$\exists y(P(y) \wedge Q(y, y))$$

que expressa o enunciado:

Existe um inteiro maior que si mesmo.

que é F e possui um conteúdo completamente distinto do enunciado original.

b) Substituindo x por $y-1$ em (*), teremos:

$$\exists y(P(y) \wedge Q(y, y-1))$$

que expressa o enunciado:

Existe um inteiro maior que seu antecessor.

que também é V, mas possui um conteúdo completamente distinto do enunciado original.

c) Substituindo x por $y+1$ em (*), teremos:

$$\exists y(P(y) \wedge Q(y, y+1))$$

que expressa o enunciado:

Existe um inteiro maior que seu sucessor.

que é F e possui um conteúdo completamente distinto do enunciado original.

d) Substituindo x por y^2 em (*), teremos:

$$\exists y(P(y) \wedge Q(y, y^2))$$

que expressa o enunciado:

Existe um inteiro maior que seu quadrado.

que também é V mas possui um conteúdo completamente distinto do enunciado original.

e) Substituindo x por $y - y^2$ em (*), teremos:

$$\exists y(P(y) \wedge Q(y, y - y^2))$$

que expressa o enunciado:

Existe um inteiro cujo quadrado é positivo.

que também é V, mas possui um conteúdo completamente distinto do enunciado original.

f) Finalmente, substituindo x por um termo t qualquer, que não possua ocorrência de y, em (*), teremos:

$$\exists y(P(y) \wedge Q(y, t))$$

que expressa o enunciado:

Existe um inteiro maior que t.

que afirma sobre t a mesma coisa que (*) afirma sobre x e, portanto, é V.

Em resumo, o fato de efetuarmos a substituição de uma variável livre por uma variável ligada em um enunciado α:

1. Altera essencialmente a forma de α.

2. Altera essecialmente o conteúdo de α.

3. Pode levar de enunciados V tanto a enunciados V quanto a enunciados F.

Nosso objetivo, então, é enunciar a regra de $\forall$-el de modo a excluir a anomalia acarretada por este tipo de substituição. Para isto, necessitamos do seguinte conceito:

Definição 5.3 *Seja x uma variável, t um termo e α um enunciado do* CQ. *x é* livre *para t em α se a substituição de x por t em α não coloca t em nenhum lugar onde uma variável y de t se torne uma ocorrência ligada de y em α.*

A regra $\forall$-el afirma que em uma determinada derivação só podemos substituir uma variável x por um termo t se x for livre para t em α, isto é, se nenhuma variável que ocorre em t se torna ligada, após a substituição ter sido efetuada.

Regra de eliminação do $\forall$ ($\forall$-el, versão definitiva) Se x é livre para t em α, então, a partir de Σ e $\forall x\alpha$, podemos concluir $(t/x)\alpha$.

$$\text{Se } x \text{ é livre para } t \text{ em } \alpha, \quad \begin{array}{l} \Sigma \\ \forall x\alpha \\ \hline (t/x)\alpha \end{array}$$

Observe que, além das restrições já impostas na definição de substituição de uma variável por um termo em um enunciado, a definição da regra $\forall$-el acrescenta ainda a seguinte, sem a qual a substituição não pode ser efetuada numa derivação:

iii) Nenhuma ocorrência de uma variável em t pode se tornar ligada após a substiuição ser efetuada.

O objetivo desta restrição é preservar a estrutura do enunciado, garantindo que $(t/x)\alpha$ afirma sobre t a mesma coisa que α afirmava sobre x.

Exemplo 38 *1. Verificar a validade dos seguintes argumentos, no* CQ*:*

a) $$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \\ \forall x(R(x) \vee \neg S(x) \to Q(x)) \\ P(a) \\ \hline \neg R(a) \wedge S(a) \end{array}$$

b) $$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to \neg Q(x)) \\ \forall x(R(x) \vee \neg S(x) \to Q(x)) \\ Q(a) \\ \hline \neg P(a) \end{array}$$

2. Verificar se os seguintes enunciados do CQ *são válidos:*

a) $\forall x \forall y P(x,y) \to \forall y P(y,y)$

b) $\forall x \forall y P(x,y) \to \forall y P(f(x,z),y)$

5.2.13 Introdução do $\forall$

A eliminação do $\forall$ foi baseada em uma reformulação do seguinte princípio, que descreve parte do conteúdo intuitivo da generalização de enunciados:

> *Se um enunciado é V para todos os elementos de um domínio, então também é V para um elemento particulardo domínio.*

Para fundamentar a introdução do $\forall$, não podemos simplesmente tomar a recíproca do princípio acima, a saber:

> *Se um enunciado é V para um elemento particular de um domínio, então é V para todos os elementos do domínio.*

De fato, saber que 0 é um número natural par não nos leva a concluir que todos os números naturais sejam pares.

Como aconteceu com todas as regras de introdução até aqui apresentadas, queremos que a regra de introdução do $\forall$ nos diga de que modo podemos inferir o enunciado $\forall x\alpha$ a partir de sua componente α ou de algum enunciado associado de maneira direta a α.

Exemplo 39 *Verificar a validade dos seguintes argumentos, no* CQ*:*

a) Todo mundo da nossa turma gosta de Quine.
Quine não gosta de ninguém que gosta dele.
Logo, qualquer um de quem Quine goste não é da nossa turma.

b) Nenhum aluno gosta de nenhum professor.
Cada aluno gosta de todos os outros alunos.
Deste modo, nenhum professor é aluno.

Em tudo o que segue, x é uma variável, t um termo do CQ e α, β enunciados do CQ.

Os exemplos acima sugerem que, para que possamos fundamentar de maneira correta a introdução do $\forall$, a recíproca do princípio que regula a eliminação do $\forall$ deve ser reformulada da seguinte maneira:

> *Se um enunciado é V para um elemento genérico de um domínio, então também é V para todos os elementos do domínio.*

Assim, se temos uma propriedade $P(x)$ expressa por um enunciado $\alpha(x)$, e queremos provar que todo os elementos do domínio têm a propriedade, o princípio acima afirma que basta executar os seguintes passos:

PASSO 1) Provar o enunciado $\alpha(x)$ (aqui, x denota um objeto genérico).

PASSO 2) Inferir $\forall x\alpha(x)$ a partir de $\alpha(x)$.

Exemplo 40 *No Exemplo 39, temos:*

a) $P(x)$ *é a propriedade:*

Quine gostar de uma pessoa acarreta que esta pessoa não é de nossa turma *expressa pelo enunciado* $Q(a, x) \to \neg P(x)$.

Para provar a generalização $\forall x(Q(x, a) \to \neg P(x))$, *a regra de introdução do* $\forall$ *afirma que basta executar os seguintes passos:*

PASSO 1) *Provar* $Q(a, x) \to \neg P(x)$ *a partir das premissas dadas.*

PASSO 2) *Concluir* $\forall x(Q(x, a) \to \neg P(x))$ *a partir de* $Q(a, x) \to \neg P(x)$.

Os passos 1 e 2 acima são resumidos na passagem do passo 10 para o passo 11 na derivação apresentada.

b) $P(x)$ *é a propriedade:*

professores não são alunos

expressa pelo enunciado $S(x) \to \neg R(x)$.

Para provar a generalização $\forall x(S(x) \to \neg R(x))$, *a regra de introdução do* $\forall$ *afirma que basta executar os seguintes passos, análogos aos efetuado no item (a):*

PASSO 1) *Provar* $S(x) \to \neg R(x)$ *a partir das premissas dadas.*

PASSO 2) *Concluir* $\forall x(S(x) \to \neg R(x))$ *a partir de* $S(x) \to \neg R(x)$.

Os passos 1 e 2 acima são resumidos na passagem do passo 16 para o passo 17 na derivação apresentada. Nosso objetivo, nesta seção, é usar o princípio acima para enunciar formalmente a regra de eliminação do $\forall$.

REGRA DE INTRODUÇÃO DO $\forall$ ($\forall$-int, PRIMEIRA VERSÃO) A partir de Σ e α podemos concluir $\forall x\alpha$.

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ \alpha \\ \hline \forall x\alpha \end{array}$$

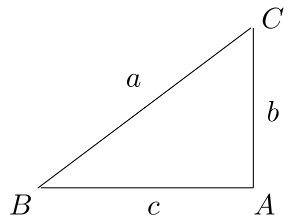
O leitor deve estar convencido de que a regra acima traduz corretamente a noção intuitiva de eliminação do $\forall$. Mas, analogamente ao que acontece com a regra $\forall$-el, veremos agora que do ponto de vista formal, ela deixa um pouco a desejar.

Exemplo 41 *a) Examinemos a seguinte prova da trigonometria:*

Proposição Para todo $x \in \mathbb{R}, sen^2x + cos^2x = 1$.

Prova:

Seja $x \in \mathbb{R}$. Considere o seguinte triângulo ABC:



Por definição,

$$senx = \frac{\text{cateto oposto a } x}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a}$$

e

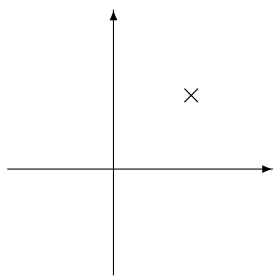
$$cosx = \frac{\text{cateto adjacente a } x}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a}.$$

Daí,

$$sen^2x + cos^2x = \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2}.$$

Pelo teorema de Pitágoras, em um triângulo retângulo de hipotenusa a e catetos b e c, temos que $a^2 = b^2 + c^2$. Daí, $sen^2x + cos^2x = \frac{a^2}{a^2} = 1$. O que prova o teorema.

Embora a prova acima pareça correta, na verdade, o resultado não foi provado para todos os números reais, mas somente para aqueles que pertencem a um determinado subconjunto próprio do conjunto dos números reais. Para ver que isto acontece, observe que nem todas as propriedades utilizadas durante a prova são genéricas *(isto é, valem para todos os números reais). Em particular, associar a um dado número real x um dos ângulos agudos de um triângulo retângulo não é uma propriedade partilhada por todos os números reais, mas somente por aqueles que pertencem ao primeiro quadrante do círculo trigonométrico.*



Assim, os únicos números reais para os quais a propriedade foi provada são os pertencentes aos intervalos $(0, \frac{\pi}{2}), (2\pi, \frac{5\pi}{2}), \ldots, (2k\pi, \frac{(4k+1)\pi}{2}), \ldots$, onde $k \in \mathbb{Z}$. Em outras palavras, o resultado que foi provado é o seguinte:

Proposição Se $x \in \mathbb{R}$ e $x \in \cup_{k\in\mathbb{Z}}(2k\pi, \frac{(4k+1)\pi}{2})$, então $sen^2x + cos^2x = 1$.

A generalização do resultado anterior para todos os números reais pode ser feita considerando-se sete outros casos, além do já provado.

b) *Verificar a validade do seguinte argumento, no* CQ*:*

x é par.
Todos os números pares são naturais.
Logo, todos os números são naturais.

O argumento acima é obviamente inválido, pois pode ser interpretado na aritmética dos números inteiros de modo a possuir premissas V e conclusão F.

Agora, o argumento pode ser simbolizado do seguinte modo, no CQ*:*

$$\frac{\forall x(Q(x) \land P(x) \to R(x))}{\forall x(Q(x) \to R(x))}$$

Utilizando a regra $\forall$-int *(primeira versão), podemos efetuar a seguinte derivação:*

P	*1*	$P(x)$
P	*2*	$\forall x(Q(x) \land P(x) \to R(x))$
H,TD	*3*	$Q(x)$
1,3,$\land$-int	*4*	$Q(x) \land P(x)$
2,$\forall$-el	*5*	$Q(x) \land P(x) \to R(x)$
4,5,MP	*6*	$R(x)$
3,6,TD	*7*	$Q(x) \to R(x)$
7,$\forall$-int	*8*	$\forall x(Q(x) \to R(x))$

que mostra que o argumento é válido.

Os pontos cruciais na derivação acima são a derivação do passo 7 a partir das premissas 1 e 2 e a passagem do passo 7 para o passo 8, onde introduzimos o $\forall x$, inferindo $\forall x(Q(x) \to R(x))$ a partir de $Q(x) \to R(x)$.

Como vimos, ao estudar o uso de regras de inferência no CS, uma das principais propriedades das regras de inferência é que elas devem *preservar a verdade*, ou seja, sempre que aplicadas a enunciados V, devem fornecer como resultado um enunciado V. No nosso exemplo, no entanto, temos como premissas enunciados considerados V e no passo 8 obtemos com aplicação de $\forall$-int (primeira versão) um enunciado F, derivado a partir destas premissas. Concluímos, então que $\forall$-int (primeira versão) não preserva a verdade, quando aplicada a enunciados do CQ, isto é, existe ao menos um enunciado α do CQ e um contexto onde α é V mas $\forall x\alpha$ é F. Por esta razão, $\forall$-int (primeira versão) não pode ser aceita como regra de inferência do CQ.

Qual será então o aspecto da introdução do $\forall$ que a regra acima não capturou, permitindo a anomalia acima? Para responder a esta questão, faremos um exame detalhado da idéia de generalização.

Para enunciar a regra de modo a excluir as anomalias acima, necessitamos dos seguintes conceitos:

Definição 5.4 *Seja Σ um conjunto de enunciados do* CQ *a partir do qual derivamos um enunciado α e seja x uma variável que ocorre livre em α. A variável x é* tratada como constante *na derivação de α a partir de Σ se satisfaz a uma das seguintes condições:*

i) $\alpha \in \Sigma$

ii) Existe $\beta \in \Sigma$, tal que x ocorre livre em β e β foi usada na derivação de α a partir de Σ.

A regra $\forall$-int afirma que, em uma derivação, não podemos generalizar variáveis tratadas como constantes.

Regra de introdução do $\forall$ ($\forall$-int, versão definitiva) Se a partir de Σ derivamos α e x não é tratada como constante nessa derivação, então a partir de Σ podemos concluir $\forall x\alpha$.

$$\text{Se } \frac{\Sigma}{\alpha} \text{ e } x \text{ não é tratada como constante, então } \frac{\Sigma}{\forall x\alpha}.$$

Exemplo 42 1. *Verificar a validade dos seguintes argumentos, no* CQ*:*

a)
$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to Q(x)) \\ \forall x(R(x) \to \neg Q(x)) \\ \hline \forall x(R(x) \to \neg R(x)) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to Q(x) \vee R(x)) \\ \forall x(Q(x) \to R(x)) \\ \hline \forall x(P(x) \to R(x)) \end{array}$$

2. *Determinar se os seguintes enunciados do* CQ *são válidos:*

a) $\forall x(P(x) \vee Q(x)) \to \forall xP(x) \vee \forall xQ(x)$

b) $\forall xP(x) \vee \forall xQ(x) \to \forall x(P(x) \vee Q(x))$

5.2.14 Introdução do $\exists$

Vamos determinar a validade dos seguintes argumentos, no CQ:

a) Todos os naturais que são primos são ímpares.
2 é um natural primo.
Assim, existe um natural ímpar.

b)
$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \to \forall y(Q(y) \to \neg R(x,y)) \\ \forall x(P(x) \to \forall y(\neg S(x) \to Q(y)) \\ P(b) \\ \hline \exists x(P(x) \land \forall y(R(x,y) \to S(x)) \end{array}$$

Em tudo que segue, x será uma variável qualquer, t um termo qualquer do CQ e α um enunciado qualquer do CQ.

Regra de introdução do $\exists$ ($\exists$-int, primeira versão) A partir de Σ e $(t/x)\alpha$ podemos concluir $\exists x\alpha$.

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ (t/x)\alpha \\ \hline \exists x\alpha \end{array}$$

A regra acima não preserva a verdade quando aplicada a enunciados do CQ, isto é, existe ao menos um enunciado α do CQ e um contexto onde $(t/x)\alpha$ é verdadeiro, mas $\exists x\alpha$ é falso.

Exemplo 43 *Verificar a validade do seguinte argumento, no* CQ*:*

Existe um inteiro, tal que algum inteiro é diferente si próprio.
Isto é óbvio, pois 2 é um inteiro.
E, além disso, existe um inteiro diferente de 2.

Queremos dizer que, se uma propriedade P vale para algum termo t, então existe um elemento x que tem a *mesma* propriedade P. Assim, devemos assegurar que, se:

$$\frac{\beta}{\exists x\alpha},$$

então β é $(t/x)\alpha$ e a substituição de x por t pode ser efetuada sem que a estrutura do enunciado seja alterada.

Informalmente, a regra $\exists$-el afirma que só podemos concluir $\exists x\alpha$ a partir de $(t/x)\alpha$ se α afirmar sobre x a mesma coisa que $(t/x)\alpha$ afirmava sobre t.

Regra de introdução do $\exists$ ($\exists$-int, versão definitiva) Se x é substituível por t em α, então a partir de Σ e $(t/x)\alpha$ podemos concluir $\exists x\alpha$.

Se x é substituível por t em α, então $\dfrac{\begin{array}{c}\Sigma\\(t/x)\alpha\end{array}}{\exists x\alpha}$.

Exemplo 44 *1. Determinar a validade dos seguintes argumentos, no* CQ*:*

a) $\dfrac{\begin{array}{l}\forall x(P(x) \vee Q(x) \vee R(x))\\ \forall x(P(x) \to \neg S(x))\\ \neg R(a) \wedge S(a)\end{array}}{\exists x(\neg P(x) \wedge Q(x))}$

b) $\dfrac{\begin{array}{l}\exists x(P(x) \to Q(x))\\ P(a)\end{array}}{Q(a)}$

2. Determine se os seguintes enunciados do CQ *são válidos:*

a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

b) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

5.2.15 Eliminação do $\exists$

Em tudo o que segue, x é uma variável, t um termo e α e β são enunciados quaisquer do CQ. A eliminação do $\exists$ é baseada no seguinte princípio:

> Se existe um objeto a que satisfaz o enunciado $\alpha(x)$ e t é um nome para a, então podemos concluir o enunciado $\alpha(t)$.

Exemplo 45 *Determinar a validade dos seguintes argumentos, no* CQ*:*

a) Todos os gatos são animais.
Alguns gatos têm cauda.
Deste modo, alguns animais têm cauda.

b) Todos os professores calvos são legais.
Existe um professor calvo que é bonito.
Logo, existe um professor que é bonito e legal.

Como os exemplos anteriores sugerem, o nome escolhido deve ser uma constante ou uma variável. Assim, baseado no princípio, temos a seguinte regra:

Regra de eliminação do $\exists$ ($\exists$-el, primeira versão) Se t é uma constante ou uma variável e a partir de Σ e $(t/x)\alpha$ podemos concluir β, então a partir de Σ e $\exists x\alpha$ podemos concluir β.

Se t é uma constante ou variável, então $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\(t/x)\alpha\end{matrix}}{\beta}$ acarreta $\dfrac{\begin{matrix}\Sigma\\\exists x\alpha\end{matrix}}{\beta}$.

A regra acima não preserva a verdade, no CQ, isto é, existe ao menos uma variável x, um termo t, um enunciado $(t/x)\alpha$ do CQ e um contexto onde, se $(t/x)\alpha$ for verdadeiro, então β será verdadeiro, mas o fato de $\exists x\alpha$ ser verdadeiro não acarreta que β seja verdadeiro. Isto se dá por vários motivos:

Exemplo 46 *a) Ao efetuar a substituição, não podemos alterar a estrutura do enunciado. De fato, considere a seguinte sentença:*

(1) Existe um inteiro, tal que todo inteiro positivo é diferente dele.

Esta sentença é verdadeira na aritmética usual dos números naturais, pois 0 *é um inteiro e todo inteiro positivo é diferente de* 0*.*

No CQ*, a sentença (1) pode ser simbolizada do seguinte modo:*

$$(2)\ \exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y) \rightarrow y \neq x)).$$

Aplicando a regra $\exists$-el *a (2), podemos derivar o enunciado:*

$$(3)\ P(y) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y) \rightarrow y \neq y).$$

Aplicando agora a regra $\wedge$-el *a (3), temos o enunciado:*

$$(4)\ \forall y(P(y) \wedge Q(y) \rightarrow y \neq y),$$

ou seja, todo inteiro positivo é diferente de si mesmo *que é, seguramente, um enunciado falso na aritmética usual dos números naturais.*

Em resumo, a regra acima nos permite efetuar a seguinte derivação:

P	*1*	$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y) \rightarrow y \neq x))$
1,$\exists$-el	*2*	$P(y) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y) \rightarrow y \neq y)$
2,$\wedge$-el	*3*	$\forall y(P(y) \wedge Q(y) \rightarrow y \neq x)$

Ou seja, provar que o argumento:

$$\frac{\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge Q(y) \rightarrow y \neq x))}{\forall y(P(y) \wedge Q(y) \rightarrow y \neq x)}$$

é válido, embora exista um contexto onde sua premissa é verdadeira e a conclusão é falsa.

b) Não podemos escolher um nome que já ocorra nas premissas. De fato, considere o seguinte enunciado:

(1) Dois é par e existe um número que não é par.

O enunciado acima não é uma contradição, pois é verdadeiro na aritmética usual dos números naturais.

Simbolizando o enunciado (1) no CQ, *teremos:*

$$(2)\ R(a) \wedge \exists x(S(x) \wedge \neg R(x))$$

Aplicando as regras de eliminação/introdução a (2), podemos construir a seguinte derivação:

P	1	$R(a) \wedge \exists x(S(x) \wedge \neg R(x))$
1,∧-el	2	$R(a)$
1,∧-el	3	$\exists x(S(x) \wedge \neg R(x))$
3,∃-el	4	$S(a) \wedge \neg R(a)$
4,∧-el	5	$\neg R(a)$
2,5,∧-int	6	$R(a) \wedge \neg R(a)$

que prova que (1) é uma contradição.

c) Não podemos fazer afirmações sobre o objeto que $\exists x\alpha(x)$ garante existir, baseados nas conclusões obtidas, que possuem ocorrências de seu nome. De fato, considere o seguinte argumento:

(1) Existe um número par.
Logo, 2 é um número par.

O argumento acima é inválido — embora possua premissa e conclusão verdadeira — pois existe ao menos um contexto para (1) em que a premissa é verdadeira e a conclusão falsa.

De fato, simbolizando o argumento (1) no CQ, *teremos:*

$$(2)\ \frac{\exists x(T(x) \wedge U(x))}{T(b) \wedge U(b)}$$

Agora, considere o contexto para (2) onde:

$$\begin{array}{rcl} \textit{domínio} & : & \{0,1\} \\ T(x) & : & x=0 \\ U(x) & : & x=0 \\ b & : & 1 \end{array}$$

Neste caso, temos que a premissa $\exists x(T(x) \wedge U(x))$ é verdadeira, pois a disjunção $(T(0) \wedge U(0)) \vee (T(1) \wedge U(1))$ é verdadeira. No entanto, a conclusão $T(b) \wedge U(b)$ é falsa, pois $T(1)$ e $U(1)$ são ambos falsos.

Aplicando a regra ∃-el *a (2), podemos efetuar a seguinte derivação:*

$$\begin{array}{lll} P & 1 & \exists x(T(x) \wedge U(x)) \\ 1, \exists\text{-el} & 2 & T(b) \wedge U(b) \end{array}$$

que prova que (1) é válido.

Na verdade, o enunciado $\alpha(x)$, obtido a partir de $\exists x\alpha$ pela eliminação do $\exists$, desempenha a função de uma premissa adicional que é acrescentada às outras premissas para que possamos tirar algumas conclusões, usando o enunciado condicional.

Assim, quando aplicamos a regra ∃-el, devemos respeitar ao menos as seguintes restrições:

i) A substituição de x por t deve preservar a estrutura do enunciado (veja o Exemplo 1).

ii) O termo que entra no lugar de x deve ser uma constante ou variável que não ocorra livre nas premissas da derivação (veja o Exemplo 2).

iii) A conclusão a que se chega por aplicação da regra não deve possuir a variável de substiuição livre (veja o Exemplo 3).

Regra de eliminação do ∃ (∃-el, versão definitiva) Se t é uma constante ou variável que satisfaz às seguintes restrições:
i) t não ocorre livre em Σ,
ii) x é substituível por t em α,
iii) a partir de Σ e $(t/x)\alpha$ podemos concluir β,
iv) e t não ocorre livre em β,
então a partir de Σ e $\exists x\alpha$ podemos concluir β.

$$\text{Sob as restrições acima, se } \begin{array}{c} \Sigma \\ \underline{(t/x)\alpha} \\ \beta \end{array}, \text{ então } \begin{array}{c} \Sigma \\ \underline{\exists x\alpha} \\ \beta \end{array}.$$

Na prática, sempre que possível, usamos uma constante.

Assim, todas as restrições são respeitadas de maneira imediata.

Exemplo 47 *1. Verificar a validade dos seguintes argumentos, no* CQ*:*

a)
$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \wedge Q(x) \to S(x)) \\ \exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)) \\ \hline \exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge S(x)) \end{array}$$

b)
$$\begin{array}{l} \exists x(P(x) \wedge Q(x) \to S(x)) \\ \exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge R(x)) \\ \hline \exists x(P(x) \wedge Q(x) \wedge S(x)) \end{array}$$

2. Verificar se os seguintes enunciados são válidos, no CQ*:*

a) $\exists x(P(x) \wedge Q(x)) \to \exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$

b) $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x) \to \exists x(P(x) \wedge Q(x))$

Bibliografia

[1] W. CARNIELLI e L. R. EPSTEIN, *Computabilidade, funções computáveis, lógica e os fundamentos da matemática*, Editora UNESP, São Paulo, 2006.

[2] R. CORI e D. LASCAR, *Mathematical Logic, a course with exercises*, Oxford, New York, 2001.

[3] H.-D. EBBINGHAUS, J. FLUM e W. THOMAS, *Mathematical Logic*, Second Edition, Springer, Heidelberg, 1994.

[4] H. B. ENDERTON, *A mathematical introduction to logic*, Second Edition, Academic Press, San Diego, 2001.

[5] C. A. MORTARI, *Introdução à lógica*, Editora UNESP, São Paulo, 2001.

[6] J. NOLT e D. ROHATYN, *Lógica*, Makron Books, São Paulo, 1991.

[7] F. C. SILVA, M. FINGER e A. C. V. MELO, *Lógica para Computação*, Thomson Learning, São Paulo, 2006.

[8] J. N. SOUZA, *Lógica para Ciência da Computação*, Campus, Rio de Janeiro, 2002.

[9] P. SUPPES, *Introduction to logic*, Van Nostrand, New York, 1957.