Universidade Federal Fluminense

Centro de Estudos Gerais

Instituto de Matemática

Curso de Especialização para Professores de Matemática do Ensino Fundamental Médio

Marcus Vinicius Angelo Reis

Contando por Princípios

Niterói

2010

Marcus Vinicius Angelo Reis

Contando por Princípios

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista.

Orientador: Prof. Dr. Jorge Petrucio Viana

Niterói

2010

Marcus Vinicius Angelo Reis

Contando por Princípios

Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Fundamental e Médio da Universidade Federal Fluminense, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista.

Aprovada por:

Prof. Dr. Jorge Petrucio Viana – Orientador
UFF

Profª. Drª. Márcia Rosana Cerioli
UFRJ

Profª. Drª. Solimá Gomes Pimentel
UFF

Prof. Dr. Paulo Roberto Trales
UFF

Niterói

2010

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado a oportunidade e o equilíbrio para realizar o presente trabalho, me proporcionando crescimento intelectual e moral.

Ao meu orientador, Professor Doutor Jorge Petrúcio Viana, pelas orientações, pela paciência, carinho e empenho na realização deste trabalho.

A todos os professores, de quem tive o privilégio de ser aluno no curso de Especialização em Matemática para Professores do Ensino Médio.

A todos que me deram ouvidos nos momentos difíceis e me incentivaram a caminhar.

Dedicatória

A minha querida mãe que me ajudou nos momentos mais difíceis da minha caminhada e que sempre acreditou em meus sonhos e ao meu querido pai, que não se encontra mais entre nós, mas que mora no meu coração.

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução

Neste trabalho descrevemos e fazemos uma análise crítica, em linhas gerais, da didática que é usualmente adotada no ensino de análise combinatória. Também tentamos descrever os principais motivos de sua utilização. Após ilustrar alguns problemas com a utilização desta didática, descrevemos uma didática alternativa e estudamos alguns de seus aspectos lógicos.

Nosso objetivo último com este trabalho, é ter um entendimento inicial de como didáticas alternativas para o ensino de análise combinatória podem ser desenvolvidas e, a partir daí, pesquisar a aplicação das mesmas, buscando maneiras melhores de ensinar este conteúdo. Estas didáticas devem privilegiar principalmente o raciocínio, o qual deve ser sistematizado de forma segura e sem "achismos". O objetivo ideal procuramos é o de utilizar métodos que levem o aluno, após a resolução de um problema de análise combinatória, a ter certeza de que a resolução por ele proposta resolve corretamente o problema, deixando um mínimo de margens para erro ou discussões.

Neste capítulo, fazemos uma discussão geral sobre a importância da chamada *combinatória de contagem*, ou *análise combinatória*, no Ensino Básico. Fazemos, também, uma discussão da dificuldade logística encontrada pelos professores que se dedicam a aprender esta disciplina. Para isto, descrevemos o nosso caso específico, salientando algumas dificuldades por nós encontradas, pois acreditamos que a situação dos outros professores não seja muito diferente da nossa. Após uma descrição sumária da *didática da classificação dos problemas* — que é usualmente adotada no ensino da análise combinatória, no Ensino Básico — fazemos uma descrição, também sumária, da *didática dos princípios de contagem*, que é o principal tema tratado nesta monografia. Com isto, apresentamos nossos objetivos principais e fazemos uma descrição dos conteúdos da monografia.

1.1 Considerações preliminares e justificativas

Segundo as Orientações Curriculares para o Ensino Médio [PCNEM, 2006] e a Lei de Diretrizes e Bases [LDB, 1996], a análise de dados é essencial na solução de problemas econômicos, bem como na elaboração de estatísticas e de cálculos de probabilidades relacionados à saúde, populações, transportes, orçamentos, questões de mercado, etc. Por fazerem tanto parte do nosso dia-a-dia quanto do daqueles que trabalham nos grandes desenvolvimentos, a maioria dos problemas considerados nestes contextos interessam a grande maioria dos cidadãos.

Por conta da quantidade, da diversidade e da complexidade das informações envolvidas na resolução destes problemas, os meios de comunicação — em geral, aqueles que divulgam este tipo de informação para as grandes audiências — disseminam os dados estatísticos por meio de gráficos e de tabelas. Assim, espera-se que durante o Ensino Básico os alunos adquiram a habilidade de ler as informações representadas em gráficos e tabelas. Mas, para que se possa dizer que eles atingiram um patamar satisfatório na sua formação, espera-se também que, ao final dos estudos, eles sejam capazes de refletir criticamente sobre o significado das informações lidas, quantificá-las, compará-las e tomar decisões de acordo com essas comparações.

Talvez a maneira mais imediata de quantificar e comparar conjuntos de dados ou informações seja determinar o número de seus elementos. Assim, a contagem direta e exata do número de elementos de um conjunto, em suas mais variadas manifestações, é uma habilidade fundamental básica que todo aluno do Ensino Básico deve possuir e deve desenvolver. Mas, como é fácil de se perceber, existem casos importantes em que a contagem do número de elementos de um conjunto não pode ser feita de maneira direta ou elementar. Daí, surge a necessidade de se recorrer aos *métodos de contagem dos elementos de um conjunto*, na resolução de determinados problemas.

O que foi dito até o momento salienta a importância geral que os problemas de análise combinatória têm para a formação do aluno e, por conseguinte, para a formação e para a atuação do professor. Como é do senso comum, o professor que irá transmitir esses conhecimentos para os alunos deve ter o domínio do que vai ensinar. Mas, apesar de se esperar o contrário, é difícil para uma pessoa interessada em análise combinatória aprender esse conteúdo de maneira adequada e dominá-lo a ponto de ensiná-lo. Vamos corroborar esta afirmação dando uma visão geral sobre a formação do professor e sobre a metodologia que é usualmente empregada para ensinar os alunos a resolverem problemas de contagem. Como o nosso objetivo não é apresentar uma visão exaustiva deste intrincado estado de coisas, mas apenas levantar alguns pontos que serão o objeto das discussões que seguem, vamos descrever em detalhes o nosso caso específico, salientando as principais dificuldades encontradas. Ao discutir estes assuntos com outros professores, pudemos concluir que a situação deles não é muito diferente da nossa.

Até o final do Ensino Médio, não me recordo de ter estudado maneiras e técnicas de resolver problemas de contagem. Mas, após essa etapa da minha vida escolar — quando frequentei dois cursos preparatórios: um para as Escolas Militares, e outro para prestar o vestibular para Matemática— tive o meu primeiro contato com os problemas de contagem e probabilidade.

Como é usual, em se tratando de cursos preparatórios, a matemática era dividida em três partes: álgebra, aritmética e geometria. E para cada uma destas partes da matemática, havia um professor específico. Nas aulas em que os problemas de contagem eram abordados, sentia dificuldades em aprender as técnicas de resolução de tais problemas. Passei, então, a frequentar como ouvinte as aulas de outros professores em outras turmas, e a participar de projetos específicos que abordassem esses problemas. Percebi que os problemas de contagem e probabilidade abordados pelos professores eram muito parecidos e ensinados de forma similar, sem muito aprofundamento. Além disso, a quantidade de exercícios propostos sobre esse assunto era pequena e após a correção de alguns poucos exercícios, o assunto dava-se por encerrado.

Em 1997, prestei o vestibular para a Universidade Federal Fluminense (UFF) e, em 1998, ingressei no curso de Licenciatura Plena em Matemática desta conceituada instituição de ensino. Na UFF, desejava cursar uma matéria que abordasse problemas de contagem, pois além de desafiadores, tinha a certeza que precisaria dominar os métodos de resolução deste tipo de problema, para minhas futuras práticas docentes. A expectativa não se confirmou, pois durante os períodos em que estudei na UFF nenhum curso contendo conteúdos de análise combinatória foi oferecido. Me formei em 2002, pela UFF e, desde aquela data, passei a trabalhar na rede privada de ensino, onde trabalho até hoje.

A partir de 2005, passei a lecionar em escolas da rede pública, e em cursos preparatórios para concursos públicos. Lecionando em preparatórios para concursos públicos, nos quais a matemática é cobrada, pude perceber a crescente cobrança nas provas da resolução de problemas que envolvem raciocínios combinatórios e probabilísticos básicos. Com o objetivo de melhorar a maneira de abordar e ensinar os problemas que envolvem estes tipos de raciocínios, procurei conversar com outros profissionais sobre as suas experiências pessoais e, após muitas conversas informais com colegas de trabalho, percebi a insatisfação que eles apresentavam por não dominarem, como gostariam, as técnicas para o ensino da resolução dos problemas de contagem e probabilidade.

Na perspectiva de estudar para ensinar melhor, no ano de 2008, prestei o exame para o Curso de Especialização em Matemática para Professores de Ensino Fundamental e Médio, na UFF, obtendo êxito. No curso de Especialização da UFF, também não me foi oferecida uma disciplina que tratasse da resolução de problemas básicos de análise combinatória e probabilidade. Daí, resolvi me aprofundar e especializar na resolução de problemas deste tipo, por meio do presente trabalho.

Os parágrafos acima relatam as lacunas em nossa formação, no que diz respeito aos conteúdos de análise combinatória. Sobre a formação do professor de matemática no que diz respeito ao ensino/aprendizagem destes conteúdos, é nossa opinião que, na grande maioria dos casos, há um grave comprometimento. Isso se deve, pelo menos, ao fato de que, como foi o nosso caso, muitos professores terminarem o curso de graduação em licenciatura em matemática sem terem cursado uma disciplina de combinatória ou similar. Ou ainda, quando o fazem, a disciplina é, usualmente, oferecida em moldes que não atendem as necessidades da sala de aula, causando insegurança no profissional que irá ministrá-las.

Essa reconhecida falta de domínio por parte dos professores dos *conteúdos* de análise combinatória tem implicação direta no aprendizado dos conceitos relacionados a esses conteúdos nos alunos, pois como ressalta R.D. Sabo [Sabo, 2010],

> admitindo a hipótese de que as concepções dos alunos sobre esses conceitos, já descritas em algumas pesquisas (Sturm, 1999), (Esteves, 2000), (Costa, 2003), são influenciadas e direcionadas pelas concepções dos professores, estaremos, assim, de alguma forma, identificando, também, as

concepções dos alunos sobre o tema.

Também, a pouca intimidade com as técnicas de *resolução de problemas* de contagem, é prejudicial, como afirma J.M. Lopes. Para este autor [Lopes, 2006], a resolução de problemas no ensino de matemática é fundamental, pois:

> Os Parâmetros Curriculares elegem a resolução de problemas como peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios.

Dentre esses problemas de matemática mencionados nos PCNs, estão, é claro, os de combinatória e os de probabilidade que, nos últimos anos, têm ganhado destaque, fazendo valer uma das máximas das Orientações Curriculares para o Ensino Médio [PCNEM, 2006]:

> Os conteúdos do bloco análise de dados e probabilidade têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Uma das razões desse ponto de vista reside na importância das idéias de incerteza e de probabilidade, associadas aos chamados fenômenos aleatórios, presentes de forma essencial nos mundos natural e social. O estudo desse bloco de conteúdos possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico.

Devido a importância do estudo dos conceitos e da resolução de problemas de análise combinatória na formação dos alunos, é natural que estes problemas façam parte do currículo do Ensino Básico. Daí, o professor deve dominar este assunto, para explicar aos alunos. Mas, pela falta de segurança em abordar os problemas de combinatória e probabilidade, usualmente, muitos professores não abordam este assunto em sala de aula; ou quando ministram este assunto o fazem superficialmente, explicando apenas os exemplos mais simples que são resolvidos com o Princípio Multiplicativo e outros ainda mais básicos.

Mas, existem ainda os professores que desejam cumprir o planejamento e que, por falta de um maior conhecimento do assunto, para o fazerem utilizam uma didática — como se pode constatar ao examinar os livros didáticos — apoiada em uma metodologia completamente inadequada para o ensino de análise combinatória. Essa metodologia que consiste, essencialmente, em resolver os problemas de análise combinatória classificando-os segundo determinados critérios não exaustivos e, em seguida, aplicando uma fórmula correspondente, tem se perpetuado por vários anos e é amplamente empregada. O maior problema com esta abordagem é que ela é aplicada indiscriminadamente — como proposto em alguns livros e como iremos mostrar em alguns exemplos — sem levar em conta o raciocínio combinatório intrínseco ao problema, que é aquele inicialmente exploratório, onde levam-se em consideração as características dos elementos que se quer contar, dá-se exemplos de alguns objetos que se quer contar, para se ter certeza do que queremos contar e da melhor maneira de contar.

1.2 Objetivos principais

Neste trabalho, pretendemos contribuir para uma mudança neste estado de coisas, elaborando um texto sobre análise combinatória, aonde os seguintes temas são abordados:

1. A divulgação de um método, para a resolução de problemas básicos de contagem, elaborado pela Professora Márcia R. Cerioli do IM-UFRJ, em colaboração com o Professor Jorge Petrúcio Viana do IM-UFF.

2. Exemplificação e utilização deste método, por meio da resolução de diversos

problemas de contagem.

Um exame dos exemplos apresentados deixará claro para o leitor que, quando feita de maneira sistemática, a aplicação do método pode também criar no aluno hábitos de raciocínio e de expressão que facilitam a organização das informações, atingindo assim os objetivos dos PCNs.

3. O início de uma investigação formal sobre o método, no estabelecimento de algumas relações lógicas formais entre os princípios que são usados nas suas aplicações.

Em sua essência, este método consiste do seguinte:

I. Em primeiro lugar, o indivíduo que quer resolver o problema deve repensar a questão apresentada e, à partir deste repensar, reformular o problema propondo uma nova redação mais simples e objetiva.

   Este primeiro exame crítico do problema é necessário, como afirmam A.B. Pacheco e C.F. Medeiros [Pacheco e Medeiros, 2006], na medida em que o problema proposto estiver com informações desnecessárias ou falta de informações ou, ainda, com as informações adequadas, mas escrito de maneira confusa. Isso pode induzir o leitor, que pode ser uma criança ou um adulto, na busca de significado para dar sentido ao que lê, a ser guiado a interpretações distintas. E isso o levará a soluções diversas daquela que o problema realmente propunha.

II. O próximo passo após essa reformulação do problema é reconhecer o objeto que se quer contar, objeto esse chamado genericamente de *configuração*.

III. Em seguida, deve-se entender como as configurações são formadas a partir de objetos mais básicos descritos no enunciado do problema, entendendo suas "características estruturais internas".

IV. Após compreender como as configurações são formadas, elaborar uma descrição, tão formal quanto seja necessário, da maneira como uma configuração é formada, levando em conta a natureza dos objetos usados na sua construção, a repetição ou não destes objetos, a ordem ou não em que estes objetos são usados, etc. Esta descrição deve ser elaborada de maneira que todas as configurações, e somente elas, possam ser formadas a partir dos objetos básicos por sua aplicação.

V. Finalmente, utilizar esta descrição para elaborar uma estratégia de aplicação dos princípios básicos de contagem, que fornecerá, ao final da sua aplicação, o número total de configurações, que é a solução do problema que queremos resolver.

Do ponto de vista da didática da matemática, o método para a resolução dos problemas básicos de contagem, que vamos ilustrar, enfatiza a utilização do conceito de *configuração* e a aplicação de cinco *princípios básicos de contagem*. Estes são conceitos didáticos primitivos que, na maioria dos casos, não são usualmente empregados na resolução de problemas de contagem. Configurações são os objetos que queremos contar. E os princípios de contagem são os seguintes, quando descritos de maneira informal:

1. **Princípio da Bijeção:** É o princípio que nos permite determinar o número de elementos de um conjunto B de maneira indireta, por meio de um conjunto A para o qual sabemos (1) determinar o número de elementos e (2) que tenha o mesmo número de elementos que B.

2. **Princípio k para 1:** É o princípio que nos permite determinar o número de elementos de um conjunto B de maneira indireta, por meio de um conjunto

A, para o qual sabemos (1) determinar o número de elementos e (2) que o número de elementos que ele possui é um múltiplo do número de elementos de B.

3. **Príncípio Aditivo:** É o princípio que nos permite determinar o número de elementos de um conjunto A de maneira indireta, por meio da "classificação" de seus elementos em dois ou mais conjuntos, de modo que (1) saibamos determinar o número de elementos de cada um destes subconjuntos, (2) que eles não possuem elementos em comum e (3) que eles venham a exaurir todos os elementos de A.

4. **Princípio da Inclusão-Exclusão:** É o princípio que nos permite determinar o número de elementos de um conjunto A de maneira indireta, por meio da "separação" de seus elementos em dois ou mais subconjuntos de modo que (1) saibamos determinar o número de elementos de cada um destes subconjuntos e (2) saibamos determinar quantos elementos estes dois conjuntos possuem em comum.

5. **Princípio Multiplicativo:** É o princípio que nos permite determinar o número de elementos de um conjunto A, quando reconhecemos que cada elemento de A, e somente estes, pode ser formado após a tomada em sequência de duas ou mais decisões, $d_1, d_2, \ldots, d_n$, sendo que: (1) saibamos determinar de quantas maneiras a decisão d_1 pode ser tomada e, após d_1 ter sido tomada, (2) saibamos determinar de quantas maneiras a decisão d_2 pode ser tomada e, após d_2 ter sido tomada, continuamos desta maneira, até que após d_{n-1} ter sido tomada, (n) saibamos determinar de quantas maneiras a decisão d_n pode ser tomada.

Como veremos, por meio da resolução de problemas, a noção de configuração em conjunto com os princípios de contagem, quando aplicados de maneira correta e sistemática, possibilitam a exatidão em relação ao que se quer contar, levam a segurança na efetiva contagem que se quer determinar, e dão consistência e legitimidade às resoluções dos problemas, desenvolvendo a lógica argumentativa daqueles que os resolvem.

1.3 Estrutura do texto

Este trabalho está estruturado em 6 capítulos, além desta introdução.

No Capítulo 2 descrevemos e criticamos, em linhas gerais, a didática que é usualmente adotada no ensino de análise combinatória. Na Seção 2.1, fazemos uma breve descrição do que os livros de combinatória e probabilidade mais conhecidos caracterizam como análise combinatória e concluimos que o estado atual de coisas no ensino de análise combinatória reflete uma visão restrita apreendida das concepções comuns apresentadas nesses livros. Na Seção 2.2 fazemos uma descrição mais detalhada de como a didática atual no ensino de análise combinatória é implementada. Finalmente, na Seção 2.3 criticamos essa didática, por meio da resolução de problemas nos quais ela não se aplica de maneira satisfatória.

No Capítulo 3, descrevemos, em linhas gerais, uma alternativa para a didática da classificação dos problemas exemplificada no capítulo anterior. Essa didática, que chamamos de didática dos princípios de contagem, foi elaborada pela Professora Márcia Cerioli do IM-UFRJ e está sendo desenvolvida por ela e pelo Professor Petrúcio Viana do IM-UFF. Na Seção 3.1 destacamos a importância da resolução de problemas de análise combinatória para a vida cotidiana, discutimos a maneira como esses problemas são tratados em sala de aula e o momento que esses problemas deveriam ser inseridos na vida escolar dos alunos. Também exemplificamos a resolução de problemas para mostrar, dentre outros fatores, o da ambiguidade de enunciados, que é um dos principais motivos pelos quais o ensino de combinatória não é eficaz. Na seção 3.2, definimos e apresentamos exemplos de estruturas e de configurações que são os conceitos básicos utilizados na 'didática dos princípios de contagem'. Finalmente, na Seção 3.3 descrevemos, brevemente, a 'didática dos princípios de contagem'.

No Capítulo 4, fazemos uma descrição informal de cada um dos cinco princípios básicos de contagem. Em cada seção apresentamos um princípio e descrevemos em que situações ele pode ser aplicado. A Seção 4.1 é dedicada ao princípio da bijeção; a Seção 4.2 ao princípio k para 1; a Seção 4.3 ao princípio da adição; a Seção 4.4 ao princípio da inclusão exclusão; e, finalmente, a Seção 4.5 é dedicada ao princípio da multiplicação.

No Capítulo 5, mostramos como os princípios apresentados no capítulo anterior podem ser aplicados na resolução de problemas de contagem. Nosso objetivo é apenas ilustrar sua aplicação dos princípíos e não fazer um estudo aprofundado sobre este tema. Em cada seção ilustramos, principalmente, a aplicação de um dos princípios, mas também algumas interações entre eles. A Seção 5.1 é dedicada ao princípio multiplicativo; a Seção 5.2 ao princípio da adição; a Seção 5.3 ao princípio da bijeção; a Seção 5.4 ao princípio k para 1; e, finalmente, a Seção 5.5 é dedicada ao princípio da inclusão exclusão.

No capítulo 6 apresentamos os enunciados formais dos princípios de contagem e estudamos as relações lógicas entre eles. Em particular, verificamos quais princípios são consequências de outros e estabecemos uma hierarquia lógica dos princípios, de acordo com os seus poderes de prova, em oposição a hierarquia didática, esboçada nos capítulo anteriores. Na Seção 6.1 enunciamos formalmente cada um dos cinco princípios básicos de contagem. Na Seção 6.2 apresentamos alguns resultados básicos da Teoria dos Conjuntos que serão utilizados nas provas das relações lógicas entre os princípios. Na Seção 6.3 apresentamos as relações lógicas entre os princípios, primeiramente entre os princípios generalizados e a sua forma mais simples e, finalmente, entre os princípios em suas formas simples.

A conclusão apresenta uma descrição geral do trabalho, um sumário de nossas contribuições e alguns temas correlatos como perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Didática da classificação dos problemas

Neste capítulo descrevemos e fazemos uma análise crítica, em linhas gerais, da didática que é usualmente adotada no ensino de análise combinatória. Na Seção 2.1 fazemos uma breve descrição do que os livros de combinatória e de probabilidade, mais conhecidos e utilizados pelos professores em seus estudos, entendem por análise combinatória e quais são, de acordo com eles, os principais problemas que são estudados nesta disciplina. Nosso objetivo é formular um denominador comum, a partir destas diversas visões, do que seja a análise combinatória e mostrar como a didática usualmente adotada no ensino desta disciplina corresponde a uma visão restrita deste denominador comum. Na Seção 2.2 fazemos uma descrição mais detalhada e com exemplos da didática usual que se adota no ensino de combinatória. Finalmente, na Seção 2.3 fazemos uma crítica desta didática, por meio da resolução de certos problemas nos quais ela não se aplica de maneira satisfatória.

2.1 Análise combinatória

Existem vários textos de combinatória e probabilidade, nos quais estes conteúdos são apresentados de uma forma mais profunda do que a que é usualmente encontrada nos livros didáticos para o Ensino Básico. É nestes livros que a maioria dos professoress que estão interessados em aprender combinatória fazem seus estudos, seja de maneira autodidata ou por meio de algum curso no qual esta disciplina é oferecida.

Em alguns destes livros, mas não todos, procura-se caracterizar a natureza e o escopo da combinatória. Por exemplo, segundo F.A. Lacaz Netto [Lacaz Netto, 1943],

> a *Análise Combinatória* é o ramo da matemática, que tem por fim estudar as propriedades dos agrupamentos que podemos formar, segundo certas leis, com os elementos de um conjunto finito.

Já segundo R. Nogueira [Nogueira, 1972],

> a *Análise Combinatória* se ocupa com a formação sistemática de subconjuntos de uma coleção de objetos, ordenando-os ou não, permitindo-lhes, ou não, a repetição de elementos; assim se instituem os grupamentos simples (de elementos distintos) e os completos (com eventuais repetições), ora ordenados (arranjos), ora desprovidos de ordem (combinações).

Em um texto que procura, segundo seus autores, tornar o estudo da análise combinatória mais acessível, A. de C. Bachx et. al. [Bachx et. al. 1975] escrevem que

> a Análise Combinatória, ou simplesmente Combinatória, é o ramo da Matemática que nos permite resolver problemas em que, basicamente, é necessário "escolher e arrumar" os objetos de um conjunto.

Uma visão mais abrangente, formulada em termos mais atuais é a adotada por A.C. de O. Morgado et. al. [Morgado et. al., 1991] Em um primeiro momento, estes autores afirmam que

> a *Análise Combinatória* é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas.

Ainda segundo estes autores,

> dois tipos de problemas que ocorrem frequentemente em Análise Combinatória são:
>
> 1. Demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições.
> 2. Contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

Após este parágrafo, que como veremos é uma crítica implícita aos livros adotados no Ensino Básico, A.C. de O. Morgado et. al. escrevem que

> No entanto, a *Análise Combinatória* trata de vários outros tipos de problemas e dispõe, além das combinações, arranjos e permutações, de outras técnicas para atacá-los: o princípio da inclusão-exclusão, o princípio das gavetas de Dirichlet, as funções geradoras, a teoria de Ramsey são exemplos de técnicas poderosas da *Análise Combinatória.*

Finalmente, temos a concepção de *Análise Combinatória*, adotada por S. Hazzan [Hazzan, 2007], que em um livro inteiramente dedicado a análise combinatória e probabilidade abordada no Ensino Médio, escreve somente que

> a *Análise Combinatória* visa desenvolver métodos que permitam contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos *agrupamentos formados sob certas condições.*

Essas são, no nosso conhecimento, as únicas referências em língua portuguesa nas quais se tenta, de alguma forma, caracterizar no que consiste a análise combinatória, delimitando a sua natureza e o seu escopo.

Em uma primeira análise, podemos dizer que estas caracterizações de análise combinatória se particularizam nos seguintes aspectos:

- A de Lacaz Netto, é abrangente ao afirmar que a análise combinatória estuda as propriedades dos agrupamentos formados sobre certas leis, com elementos de conjuntos finitos.

  Sem especificar, pelo menos, no que consiste este estudo (existência? enumeração? contagem exata? contagem aproximada? otimização? etc) e quais são as propriedades de interesse (classificação? comparação? etc), esta definição fornece somente uma pálida ideia de que a análise combinatória não se ocupa com qualquer tipo de objeto, mas apenas com certos tipos de agrupamentos formados com elementos de conjuntos finitos.

- A de Nogueira é restritiva ao afirmar que a análise combinatória se ocupa com a formação (existência? enumeração?) de subconjuntos, deixando de lado as outras questões (contagem exata, contagem aproximada, otimização, etc). Essa "visão" também, é matematicamente insatisfatória pois afirma que os subconjuntos considerados podem ser ordenandos ou não e podem ter ou não elementos repetidos. Ora, se é um subconjunto, nem é ordenado, nem tem elementos repetidos. Finalmente, restringe novamente o escopo da análise combinatória, quando afirma que os objetos tratados são os arranjos e as combinações. Como se sabe, estes são apenas alguns dos vários tipos de agrupamentos (usando a expressão de Lacaz Netto) que podem ser formados.

- A de Bachx et. al. explicita a tendência adotada pelos seus autores em seu livro, de que o enfoque da análise combinatória é a solução de problemas, e que para resolver estes problemas é necessário que se entenda, em alguma instância da resolução, que objetos de um conjunto devem ser escolhidos e arrumados, para algum fim.

Sem especificar, pelo menos, em que consistem estes problemas, esta definição parece ser muito abrangente para dar uma ideia do que seja a análise combinatória.

– A definição de Morgado et. al. é abrangente como as de Laccaz Netto e Bachx et. al., ao não especificar, pelo menos, o que são estruturas e relações discretas; e é restritiva como a de Nogueira, ao listar somente dois tipos de problemas (existência e enumeração), dentre todos os que estão no escopo da análise combinatória.

– Finalmente, a definição de Hazzan é restritiva, ao afirmar que a *Análise Combinatória* visa desenvolver métodos para apenas contar o número de elementos de um conjunto, sendo estes elementos, agrupamentos formados sob certas condições.

A partir destas cinco caracterizações e por meio de nossa experiência com o ensino desta discipina, podemos formular uma caracterização de análise combinatória que se adequa aos conteúdos que são abordados no Ensino Básico:

> A *análise combinatória* estuda a enumeração e a contagem de *estruturas discretas*, ou seja, agupamentos finitos formados sob certas leis, dos quais, os exemplos mais característicos são os arranjos, as permutações e as combinações, com ou sem repetições.

Esta caracterização é adequada pois, por um lado, não restringe a análise combinatória apenas ao estudo de arranjos e combinações e, por outro, restringe o escopo desta disciplina ao estudo dos problemas de enumeração e contagem (exata) — que são os únicos tipos de problema de combinatória tratados no ensino Básico —

deixando todos os outros problemas (contagem aproximada, existência, otimização, etc) para outras instâncias de caracterização.

2.2 A didática da classificação dos problemas

A concepção de análise combinatória mostrada acima — que pretende ser um denominador comum das apresentadas em [Lacaz Netto, 1943], [Nogueira, 1972], [Bachx et. al. 1975], [Morgado et. al., 1991] e [Hazzan, 2007] — está bem próxima daquela usualmente adotada no Ensino Básico. Esta última (a adotada no Ensino Básico) é ainda mais restritiva, no sentido em que deixa margem, principalmente para os que possuem a tendência de restringir os conteúdos à sua parte operacional, de considerar que a análise combinatória se resume na <u>contagem</u> de <u>arranjos</u>, <u>permutações</u> e <u>combinações</u>.

Neste sentido, a análise combinatória se ocupa da resolução de problemas de contagem, o que é correto, e os únicos agrupamentos que aparecem nestes problemas podem ser classificados como arranjos, permutações (um tipo particular de arranjo), ou combinações, o que não está correto.

Vamos agora definir arranjo, permutação e combinação, e as fórmulas para calcular o número de arranjos, permutações e combinações, para depois apresentarmos como estes conceitos e fórmulas são empregados na didática usual.

Arranjos

Sejam $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ um conjunto com m elementos e $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq m$. Chamamos de *arranjo dos m elementos tomados r a r*, ou simplesmente *arranjo de m, r a r*, a qualquer sequência de r termos formada com elementos de M, dois a dois distintos.

Denotamos por $A(m, r)$ o número de arranjos dos m elementos tomados r a r.

Tem-se que $A(m,r) = \underbrace{m \times (m-1) \times \ldots \times [m-(r-1)]}_{r \text{ fatores}}$.

Permutações

Seja $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ um conjunto com m elementos. Chamamos de *permutação dos* m *elementos*, ou simplesmente *permutação de* m, a um arranjo dos m elementos tomados m a m.

Denotamos por $P(m)$ o número de permutações dos m elementos de M. Tem-se que $P(m) = m! = m \times (m-1) \times (m-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

Combinações

Sejam $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ um conjunto com m elementos e $r \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq r \leq m$. Chamamos de *combinação dos* m *elementos tomados* r *a* r, ou simplesmente *combinação de* m, r *a* r, a qualquer subconjunto de M formado com r elementos.

Denotamos por $C(m,r)$, ou ainda por $\binom{m}{r}$, o número de combinações dos m elementos tomados r a r. Tem-se que $C(m,r) = \binom{m}{r} = \frac{m!}{r!(m-r)!}$.

Finalmente, ainda com o objetivo de formular e apresentar a didática usual que é utilizada na resolução dos problemas básicos de contagem, enunciamos — seguindo a nomenclatura adotada na maioria dos livros de Ensino Médio — um *princípio* de contagem que é considerado uma das mais importantes ferramentas da análise combinatória, pois a solução da grande maioria dos problemas básicos de contagem envolve a sua aplicação.

Princípio fundamental da contagem, PFC

Se uma decisão d_1 pode ser tomada de n_1 maneiras e se, uma vez tomada a decisão d_1, a decisão d_2 pode ser tomada de n_2 maneiras, então o número de maneiras de se tomar as decisões d_1 e d_2 é n_1n_2.

Na maioria das vezes em que a análise combinatória é abordada na sala de aula, o conteúdo apresentado se resume no estudo e aplicação do princípio fundamental da contagem, dos conceitos e das fórmulas descritas acima. Neste contexto, o ensino de análise combinatória se faz, basicamente, de uma maneira instrumental e normativa, se resumindo na aplicação do PFC em exemplos triviais e na transmissão das fórmulas para a contagem dos arranjos, permutações e combinações. É importante frisar que raramente se estabelece qualquer relação entre o PFC e as fórmulas ou das próprias fórmulas entre si (exceto, é claro, a observação que uma permutação é um tipo particular de arranjo). Além disso, se o enfoque do ensino de análise combinatória está nas aplicações triviais do PFC e na classificação dos agrupamentos em um dos três tipos acima e no uso da fórmula correspondente, fica claro para o aluno que ao abordar um problema de contagem ele deve:

1. tentar aplicar o PFC diretamente na solução do problema e, caso, isso não pareça possível,

2. classificar o problema como um *problema de arranjo*, ou um *problema de permutação*, ou um *problema de combinação*,

3. a partir daí, elaborar uma maneira de aplicar a fórmula corresponde para resolver o problema.

Usualmente, os alunos nem tentam aplicar o passo 1 acima e vão direto para a "classificação do problema" de modo a poder aplicar uma fórmula na sua solução.

Esta é a didática, que ao mesmo tempo é uma metodologia, adotada geralmente no ensino de análise combinatória, no Ensino Básico. Vamos exemplificar como isso é feito, resolvendo alguns problemas típicos.

Primeiramente, apresentamos um "problema de permutação":

Exemplo 1 Num programa transmitido diariamente, uma emissora de rádio toca sempre as mesmas 10 músicas, mas nunca na mesma ordem. Para esgotar todas as possíveis sequências dessas músicas serão necessários aproximadamente

(a) 100 dias	(b) 10 anos	(c) 1 século
(d) 10 séculos	(e) 100 séculos	

Uma solução típica para este problema, baseada na didática de classificação dos problemas, é a seguinte:

Solução: Observe que dada uma sequência a ser executada, trocando a posição em que duas músicas serão tocadas, formamos uma sequência de músicas diferente da primeira. Observe, também, que todas as músicas são usadas na formação de uma sequência e que cada música é usada exatamente uma vez.

Assim, cada sequência das músicas é uma permutação das 10 músicas e estamos diante de um "problema de permutação".

O que temos que fazer agora é elaborar uma maneira de "aplicar a fórmula de permutação". Mas isto é fácil, dado que queremos calcular todas as permutações das 10 músicas.

O número de tais sequências é $P(10) = 10! = 3.628.800$.

Como a maioria dos anos tem 365 dias, e a cada dia uma sequência é executada, o número de anos necessários para executar todas as sequências é $3.628.800 \div 365 = 9.941,91$, que é aproximadamente 10.000 anos, ou seja, 100 séculos.

Daí, a resposta correta é a letra (e).

Vejamos, agora como trabalhar num "problema de arranjo":

Exemplo 2 Uma pessoa vai retirar dinheiro num caixa eletrônico de um banco, mas, no momento de digitar a sua senha , esquece-se do número. Ela lembra que o número tem 5 algarismos, começa com 6, não tem algarismos repetidos e tem o algarismo 7 em alguma posição. O número máximo de tentativas para acertar a senha é

(a) 1.680 (b) 1.344 (c) 720 (d) 224 (e) 136

Uma solução típica para este problema, baseada na didática de classificação dos problemas, é a seguinte:

Solução: Observe que cada senha é da forma

$$6\,\_\_\,\_\_\,\_\_\,\_\_\,,$$

onde as lacunas $\_\_\,\_\_\,\_\_\,\_\_$ são ocupadas por algarismos distintos, diferentes de 6, de modo que uma delas é ocupada pelo algarismo 7.

Observe, também, que dada uma senha, se mudamos a posição de um dos algarismos que a compõem, estamos diante de uma outra senha. Daí, dizemos que a ordem em que os algarismos estão dispostos para formar a senha é importante. E como a ordem em que os algarismos estão dispostos para formar uma senha é importante, estamos diante de um "problema de arranjo".

O que temos que fazer agora é elaborar uma maneira de "aplicar a fórmula de arranjo" para resolver o problema. Para isto, vamos considerar todas as possibilidades em que o 7 pode ocupar exatamente uma das lacunas $\_\_\,\_\_\,\_\_\,\_\_$.

Vamos considerar, em primeiro lugar, as senhas em que o 7 ocupa a primeira lacuna. Para construir uma senha como esta, devemos:

1. Colocar o 7, na primeira lacuna.
2. Formar um arranjo de três elementos tomados no conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9\}$ para preencher as lacunas restantes.

Assim, temos um total de $A(8, 3)$ senhas nas quais o 7 ocorre na primeira lacuna.

Fazendo raciocínios análogos, para o 7 nas segunda, terceira e quarta lacunas, temos que o total de senhas nas condições pedidas é $A(8,3) + A(8,3) + A(8,3) + A(8,3) = 4 \times A(8,3) = 4 \times 8 \times 7 \times 6 = 1.344$.

Daí, a resposta correta é a letra (b).

Finalmente, vamos agora resolver um "problema de combinação".

Exemplo 3 A escrita Braille para cegos é um sistema de símbolos onde cada caractere é formado por uma matriz 3×2, de 6 pontos, dos quais pelo menos um se destaca em relação aos outros. Qual o número máximo de caracteres distintos que podem ser representados neste sistema de escrita?

(a) 63 (b) 89 (c) 26 (d) 720 (e) 36

Solução: Observe que cada caractere é da forma $\begin{matrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{matrix}$ onde cada ponto pode ser destacado ou não por um círculo, por exemplo, e pelo menos um dos pontos é destacado.

Observe que existem caracteres que são formados por 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 pontos destacados.

Para formar um caracter em braille com dois pontos, por exemplo, devemos destacar um ponto A, e em seguida destacar um ponto B. Mas observe que se destacamos primeiro o ponto B e depois o ponto A, estamos formando o mesmo caracter. Daí, dizemos que a ordem em que os pontos são destacados para formar o caracter não é importante. E como a ordem em que os pontos são destacados para formar o caracter não é importante, estamos diante de um "problema de combinação".

O que temos que fazer agora é elaborar uma maneira de aplicar a fórmula de combinação para resolver o problema. Para isso devemos encontrar o número de caracteres formados por 1, 2, 3, 4, 5 e 6 pontos, respectivamente, e somá-los ao final da contagem.

O número de caracteres formados por um ponto é $C(6,1) = 6$; o número de caracteres formados por dois pontos é $C(6,2) = 15$; $\ldots$; o número de caracteres formados por seis pontos é $C(6,6) = 1$.

Daí, o número total de caracteres formados com no mínimo um ponto e no máximo 6 pontos, dentre os 6 pontos dados, é $C(6,1)+C(6,2)+C(6,3)+C(6,4)+C(6,5)+C(6,6)$ que, após substituição e manipulação aritmética da fórmula, se transforma em 63.

Daí, a resposta correta é a letra (a).

2.3 Problemas com a didática da classificação

Se todos os problemas de contagem de agrupamentos formados segundo determinadas leis se reduzissem a problemas como esses expostos acima, ou seja, a problemas nos quais as únicas coisas a se verificar são: (1) se ordem em que os elementos formam os agrupamentos importa ou não; (2) se todos os elementos são usados para formar o agrupamento ou não; não haveria nenhum problema em se caracterizar a análise combinatória como a parte da matemática que resolve problemas de contagem de arranjos, permutações e combinações. Mas existem muitos problemas simples de contagem tratados no Ensino Básico, que não podem ser classificados nem como "problemas de arranjo", nem como "problemas de permutação", e nem como "problemas de combinação", como veremos a seguir.

Em primeiro lugar, apresentamos um "problema misto", ou seja, um problema envolvendo arranjos e combinações na formação de um mesmo agrupamento:

Exemplo 4 Em um edifício residencial do Rio de Janeiro, os moradores foram convocados para uma reunião, com a finalidade de escolher um síndico, um subsíndico e quatro membros do conselho fiscal, sendo proibida a acumulação de cargos. A escolha deverá ser feita entre dez moradores. De quantas maneiras diferentes, será possível fazer estas escolhas?

Solução: Em primeiro lugar, observe que se escolhemos uma pessoa A, entre os dez moradores, para ser o síndico e escolhemos uma pessoa B, para ser o subsíndico, fazemos uma escolha diferente da de se escolhemos a pessoa B para ser o síndico e a pessoa A para ser o subsíndico. Daí, a ordem em que as duas pessoas são escolhidas para ocupar os cargos de síndico e subsíndico é importante. E como a ordem em que as pessoas são escolhidas é importante, à primeira vista, estamos diante de um "problema de arranjo".

Mas, após escolher as duas pessoas para ocupar os cargos de síndico e de subsíndico, devemos escolher dentre as oito pessoas restantes (não há acumulação de cargos), quatro pessoas para formar o conselho fiscal.

Observe, agora, que a ordem em que essas quatro pessoas são escolhidas para formar o conselho fiscal não é importante , dado que, de acordo com o enunciado do problema não há especificações de cargos dentro do conselho. Como a ordem em que as pessoas são escolhidas para formar o conselho não é importante, a continuidade da análise nos leva a considerar que estamos diante de um "problema de combinação".

Uma análise como esta, usualmente, coloca o aluno que está tentando classificar o problema dentro da perspectiva limitada dos arranjos, permutações e combinações, em uma situação difícil. Nossa experiência mostra que diante de uma situação como essas — em que há mais de um resultado para a análise — o aluno, usualmente, *escolhe* qual a fórmula que ele vai aplicar na resolução do problema.

Mas o problema pode ser resolvido se observamos que para formar um agrupamento em questão devemos escolher duas pessoas para formar a dupla síndico subsíndico, onde a ordem da escolha é importante e, em seguida, escolher quatro pessoas dentre as oito que ainda não foram escolhidas para formar o conselho fiscal, onde a ordem não é importante.

Daí, este problema é, na verdade, um problema no qual o principal conceito envolvido é o Princípio Multiplicativo, que afirma que o número de escolhas possíveis é $A(10, 2) \times C(8, 4) = 5.600$.

A existência de problemas como apresentado no Exemplo 4 mostra que a didática da classificação de problemas deve ser refinada, se quisermos aplicá-la com algum proveito em sala de aula. Mas, tais "problemas mistos" não são um obstáculo intransponível para a aplicação desta didática.

Para mostrar que a situação pode ser ainda mais delicada, vamos apresentar um "problema enganador", ou seja, um problema em que a ordem em que os elementos são tomados para formar o agrupamento parece importar ou não, dependendo do modo como analisamos o problema, mas a resolução do problema pode ser feita apenas com uma aplicação da fórmula de combinação.

Exemplo 5 Uma urna contém cinco bolas azuis iguais e duas bolas verdes iguais. Uma criança vai retirar cinco bolas dessa urna, uma a uma, sem reposição, e organizá-las em uma fila. Quantas filas formadas por três bolas azuis e duas verdes são possíveis de serem organizadas?

Solução: Em primeiro lugar, observe que dada uma fila, se mudarmos a posição de duas bolas, uma azul e a outra verde, teremos uma outra fila. Daí, a ordem em que as bolas estão dipostas na fila parece ser importante para a solução do problema. E como a ordem em que as bolas estão na fila é importante estamos diante de um "problema de arranjo".

Por outro lado, dada esta mesma fila, se mudarmos a posição de duas bolas azuis (ou verdes) não teremos uma outra fila. Daí, a ordem em que as bolas estão dipostas na fila não parece ser importante para a solução do problema. E como a ordem em que as bolas estão na fila não é importante estamos diante de um “problema de combinação”.

Diante deste impasse aparente, mas tendo visto a solução do problema apresentado no Exemplo 4, os alunos podem ser levados a tentar aplicar as fórmulas de arranjo e combinação, de maneira combinada, para resolver o problema.

Mas o problema pode ser resolvido se observamos que para formar uma fila de acordo com o enunciado, temos cinco lacunas

$$\_\ \_\ \_\ \_\ \_$$

que devem ser preenchidas com três bolas azuis e as duas verdes. Assim, para formar uma fila basta colocar três bolas azuis em três das cinco lacunas (a ordem não importa) e preencher as duas lacunas restantes com as duas bolas verdes.

Como a ordem em que as bolas da mesma cor que são colocadas na fila não é importante para a determinação da fila, e sim as lacunas que elas ocupam, temos que a colocação das bolas azuis pode ser feita escolhendo dentre as 5 lacunas disponíveis as 3 que são ocupadas com bolas azuis. Temos, então, $C(5,3) = 10$ maneiras possíveis de escolher as tais lacunas.

Além disso, *após* colocadas as três bolas azuis, sobram apenas duas lacunas vazias que são preenchidas com as duas bolas verdes. Observe que existe uma única maneira de colocar essas duas bolas verdes nas lacunas vazias, pois a ordem que elas são colocadas não é importante. Daí, temos um total de $10 \times 1 = 10$ filas possíveis de serem organizadas.

Em contrapartida a didática da classificação dos problemas apresentada neste capítulo, apresentaremos no próximo a didática dos princípios de contagem.

Capítulo 3

Didática dos princípios de contagem

Neste capítulo descrevemos, brevemente, uma alternativa para a didática da classificação de problemas que foi exemplificada no Capítulo 2. A didática dos princípios de contagem se baseia na utilização de certos princípios básicos de contagem que serão descritos no Capítulo 4. Ela pode ser vista como uma abordagem inicial para ultrapassar alguns dos principais obstáculos que os estudantes de análise combinatória têm que enfrentar na resolução dos problemas de contagem: a falta de entendimento sobre os dados do problema e a falta de uma estratégia para a resolução do problema.

3.1 Pseudo ramos e ambiguidade

Segundo A.C. de O. Morgado et. al. [Morgado et. al., 1991]:

> o desenvolvimento da *Análise Combinatória* deve-se em grande parte à necessidade de resolver problemas de contagem originados na teoria das probabilidades.

Além disso, estes autores enfatizam que

> a Teoria Elementar das Probabilidades, originou-se pelo fascínio que os jogos de azar, como baralhos e dados, sempre exerceram sobre os homens.

> Este fascínio pelos jogos de azar estimulavam os homens a achar maneiras seguras de vencer.

Apesar de sua origem estar ligada a situações aparentemente mundanas, a resolução de problemas de contagem têm grande importância em diversas áreas do conhecimento e, em particular na Educação, para a formação do indivíduo, conforme destacamos no Capítulo 1. Com uma didática difundida de classificação dos problemas e aplicação de fórmulas, o ensino/aprendizado desta importante disciplina parece ser um obstáculo praticamente intransponível para professores e alunos. Mas, do que foi dito acima, não se deve concluir que somos primordialmente contra a aplicação de fórmulas na solução de problemas. A questão é a maneira como elas são aplicadas. Nessa perspectiva, temos, segundo R.D. Sabo:

> Algumas vezes, observo professores afirmando que eles próprios não têm esses conceitos [de análise combinatória] construídos de forma sólida e significativa, e, por esse motivo, evitam abordar o tema ou optam, apenas, a apresentar aos alunos um processo de aplicação de fórmulas prontas, sem justificativas ou explicações. Assim sendo, o aluno necessita utilizar-se da memorização para aplicar a fórmula certa na resolução de problemas específicos, ou seja, o ensino de Análise Combinatória torna-se tecnicista e operacional [Sabo, 2010].

E o professor dá-se por satisfeito apenas com a resposta, não levando em consideração o raciocínio investigatório, necessário para a construção da resolução do problema. O problema com essa abordagem não está no uso de fórmulas, ou seja, o uso de fórmulas não é prejudicial na resolução dos problemas de análise combinatória. Sabo, baseado em [Esteves, 2001], compartilha desta idéia, quando afirma que

> queremos mostrar que a fórmula em si não é negativa nem contraproducente; ao contrário, ela representa uma compressão algorítmica que assegura uma economia cognitiva importante, desde que colocada no tempo certo. Para o conteúdo de Análise Combinatória, quando não reforçamos a fórmula, acreditamos que estamos valorizando o uso da árvore das possibilidades, do método de tentativa e erro, do desenho e do princípio fundamental da contagem para um melhor desenvolvimento do raciocínio combinatório. Assim, a fórmula no papel deixa de ser apenas uma ferramenta para desenvolver os problemas de maneira mais econômica [Sabo, 2010].

Assim, de acordo com esta perspectiva, as fórmulas para calcular o número de arranjos, permutações e combinações apresentadas no tempo certo, teriam como objetivos a formalização das resoluções dos problemas de contagem e a simplificação dos raciocínios, encurtando inclusive a busca pela solução.

Um planejamento abrangente de como os conteúdos serão abordados ao longo das séries, pode contribuir para melhorar o uso de fórmulas na resolução dos problemas, como sugerem A.L. de Almeida e A.C. Ferreira [Almeida e Ferreira, 2008]:

> Várias pesquisas (BATANERO, 1997; ESTEVES, 2001; ROA e NAVARRO-PELAYO, 2001) evidenciam que iniciar o trabalho com Análise Combinatória no Ensino Fundamental fazendo uso da construção de diferentes agrupamentos, sem necessariamente sistematizar e/ou formalizar o estudo, pode facilitar a abordagem desse assunto no Ensino Médio. Os alunos que apresentam maiores dificuldades com relação ao tema são os que nunca tiveram contato com o conteúdo desde as séries iniciais. Ao trabalhar com tal assunto é importante analisar as etapas seguidas pelos alunos para solucionar as situações-problema e valorizar todos os mo-

> dos de pensamento (BATANERO, 1997). Criar situações de discussões, onde o aluno tem a oportunidade de expor suas ideias, propor sugestões, questionar e refletir, proporciona ao mesmo, uma autoconfiança para resolver as situações propostas. Além disso, faz com que o aluno não dê importância ao fato de errar e sim no que acarretou o erro.

Mas, juntamente com a prática da resolução dos problemas de contagem, pela sua classificação e utilização das fórmulas, sem antes ter passado por uma prática, que leve em conta, a análise do problema, as estratégias de resolução e suas diferentes representações, temos o livro didático. Durante os anos de magistério, escolhendo e utilizando o livro didático, percebi no capítulo de análise combinatória, que os problemas apresentavam-se divididos em seus "pseudos" ramos: arranjo, permutação, combinação, com ou sem repetição. Essa divisão, faz com que o aluno procure produzir uma resposta para cada problema daquele "pseudo ramo"de maneira imediata, pela simples aplicação da fórmula correspondente aquela seção, sem se preocupar em entender de fato os problemas em seus detalhes e significados, nem em elaborar uma estratégia de solução para ele. Essa maneira como os problemas estão organizados no capítulo de análise combinatória induz a utilização da fórmula apresentada naquela seção para solucionar os problemas e não propicia aos alunos a investigação de outros métodos e técnicas de contagem.

Resolvido os problemas das seções do capítulo de análise combinatória, é a hora de misturar os exercícios. Em grande parte dos livros de Ensino Básico, no final de cada capítulo, encontra-se uma lista de exercícios que abordam todo o conteúdo estudado naquele capítulo. Era de se esperar que, após a resolução de todos os problemas de todos os "pseudos ramos" da análise combinatória, o aluno tivesse o domínio das técnicas de resolução desses problemas. Mas, as experiências e observações mostram que, na grande maioria das vezes, os alunos não sabem decidir nem mesmo quanto a natureza dos agrupamentos. Isto se dá tanto pela má administração do conteúdo, quanto pela maneira equivocada, em relação a própria didática adotada, em que os problemas são apresentados. Segundo, A.B. Pacheco e C. F. de Medeiros [Pacheco e Medeiros, 2006]:

> Os problemas verbais de Análise Combinatória não trazem claramente essa distinção, isto é, quando o problema é proposto não apresenta no seu contexto verbal a expressão do tipo: 'este problema é um arranjo simples' ou 'este problema é uma combinação'.

E nem os problemas escritos, por mais simples que sejam, trazem esta descrição. Daí, o aluno não sabe distinguir, se o problema que deve ser resolvido se trata de um "problema de arranjo" ou se trata de um "problema de combinação", por exemplo. Sendo assim, o aluno terá que elaborar, ele mesmo, um critério para fazer a distinção. Que critérios o aluno utilizaria para distinguir problemas que apresentam os mesmos "contextos reais" ou seja são parecidos em seus enunciados, mas apresentam soluções com raciocínios combinatórios diferentes?

Para exemplificar o que foi exposto acima, vamos apresentar e analisar dois problemas que foram utilizados por nós em sala de aula e uma terceira pergunta que, juntamente com os dois problemas, cairam na prova de uma turma de segundo ano do Ensino Médio em uma Escola Estadual da cidade do Rio de Janeiro, no ano de 2009.

Problema 1 Dispondo de 7 mulheres para formar uma chapa presidente/vice-presidente, quantas chapas podemos montar?

Problema 2 Dispondo de 7 mulheres, quantas duplas de vôlei podemos formar?

Problema 3 As resposta dos Problemas 1 e 2 são iguais? Qual a principal diferença entre o modo de resolver o Problema 1 e o modo de resolver o Problema 2?

Ao tentar resolver o Problema 1, um aluno habituado a resolver os problemas de análise combinatória pela didática da classificação de problemas vai, primeiramente, se perguntar qual é o tipo de problema considerado e, consequentemente, qual é a fórmula que deverá usar. Mas para classificar o Problema 1 corretamente, ele deve entender como uma chapa presidente/vice-presidente é formada.

Em primeiro lugar, observe que é necessário exatamente duas mulheres para formar uma chapa. Mas isto não é suficiente, pois cada dupla de mulheres selecionadas dará origem a duas chapas.

De fato, suponhamos que as letras iniciais dos nomes das sete mulheres sejam A, B, C, D, E, F e G. Vamos escolher duas mulheres dentre as sete. Sejam, por exemplo, C e F as mulheres escolhidas. Uma chapa presidente/vice-presidente que podemos montar com as mulheres C e F é

$$C \text{ como presidente e } F \text{ como vice-presidente.}$$

Por outro lado, em vez de escolher a mulher C para presidente podemos escolher a mulher F e, assim, a mulher C para vice-presidente. Daí, a chapa seria

$$F \text{ como presidente e } C \text{ como vice-presidente.}$$

Logo, cada sequência de duas mulheres nos cargos de uma chapa presidente/vice-presidente dá origem a exatamente uma chapa. Daí, dizemos que a ordem em que as mulheres são escolhidas para os cargos de presidente/vice-presidente, para a formação da chapa é importante. E dizemos que o problema é de arranjo, e para resolvê-lo bastaria descobrir como aplicar a fórmula correspondente.

Assim como no problema 1, o aluno habituado a didática da classificação de problemas vai tentar decidir qual a fórmula que deve ser utilizada para resolver o Problema 2. Para isso, ele deve entender como uma dupla de vôlei é formada.

Em primeiro lugar, observe que é necessário termos exatamente duas mulheres para formar uma dupla de vôlei. E isto é suficiente, pois cada dupla de mulheres selecionadas dará origem apenas a uma dupla de vôlei.

De fato, suponhamos que as letras iniciais dos nomes das sete mulheres sejam A, B, C, D, E, F e G. Vamos escolher duas mulheres dentre as sete. Sejam, por exemplo, C e F as mulheres escolhidas. Como, de acordo com o enunciado do Problema 2, não existem cargos ou maior importância de uma mulher em relação a outra na dupla, concluimos que C e F formam apenas uma dupla de vôlei.

Logo, dizemos que a ordem em que as duas mulheres foram escolhidas para formar uma dupla de vôlei não importa. Daí, dizemos que o problema é de combinação, e para resolvê-lo bastaria descobrir como aplicar a fórmula correspondente.

Quanto ao Problema 3, podemos dizer que a principal diferença entre resolver o Problema 1 e o Problema 2 reside da importância da ordem da escolha das mulheres na formação de uma chapa no Problema 1 e não na importância da ordem da escolha das mulheres na formação da dupla de vôlei no Problema 2.

Os Problemas 1 e 2 são bastante "claros" com relação aos seus enunciados. Seus enunciados não nos levam a interpretações ambíguas, apesar de possuirem enunciados parecidos. Mas para alunos que não estão acostumados a interpretar os problemas em detalhes, a probabilidade de que não obtenham sucesso com relação a solução pode ser grande. Vale observar, que se apenas um dos dois problemas fosse proposto, o aluno, decidiria a fórmula que iria usar, segundo seus critérios, e o problema no seu ponto de vista estaria resolvido.

Por outro lado, observe o seguinte problema, proposto na página 11 do livro de S. Hazzan:

> Uma sala tem 10 portas. De quantas maneiras diferentes essa sala pode ser aberta? [Hazzan, 2007]

Um aluno do Ensino Médio pode apresentar a seguinte estratégia de resolução:

> Primeiro, vou escolher uma porta para abrir. Quantas possibilidades tenho? 10.
>
> Com a primeira porta já aberta, vou escolher uma outra porta para abrir. Quantas possibilidades tenho? 9, pois uma porta já está aberta.
>
> Seguindo esse raciocínio, pelo Princípio da Multiplicação, existem 10! maneiras de abrir a sala.

Um outro aluno poderia, por sua vez, resolver o problema do seguinte modo:

> Vou numerar as portas de 1 a 10, para simplificar a resolução do problema.
>
> Vou fazer a seguintes perguntas:
>
> 1. Abrir a porta 3, e logo em seguida abrir a porta 4, e logo em seguida abrir a porta 8, e logo em seguida abrir a porta 10 é a mesma coisa que abrir a 8, e logo em seguida abrir a porta 10, e logo em seguida abrir a porta 3, e logo em seguida abrir a porta 4? Sim, pois em ambos os casos, a sala estará aberta pelas portas 3, 4, 8 e 10.
> 2. Abrir a sala é abrir pelo menos uma porta? Sim, pois se não abrir nenhuma porta, a sala estará fechada.
>
> Daí, concluo que o número total de maneiras de abrir a sala é igual ao número total de sequências formadas por 10 termos, onde cada termo é ou a letra A (de abrir) ou uma letra F (de fechar). Por exemplo, a sequência $F, F, F, A, A, F, A, A, F, A$ representa que a sala está aberta pelas portas 4, 5, 7, 8 e 10, já a sequência $F, F, F, F, F, F, F, F, F, F$ representa que todas as portas estão fechadas.

Para facilitar a contagem, vamos considerar a possibilidade da sala estar fechada, ou seja, com todas as portas fechadas. Vamos, então, contar o número total de sequências formadas por 10 termos, incluindo a sequência que representa a sala fechada, onde cada termo é a letra A ou a letra F. Para formar uma tal sequência podemos executar 10 tarefas análogas:

t_1 : escolher uma das letras A ou F para ser o primeiro termo da sequência;
t_2 : escolher uma das letras A ou F para ser o segundo termo da sequência;
$\vdots$ $\vdots$
t_i : escolher uma das letras A ou F para ser o i-ésimo termo da sequência,
$\vdots$ $\vdots$
t_{10} : escolher uma das letras A ou F para ser o décimo termo da sequência;

A tarefa t_1 pode ser executada de 2 maneiras; a tarefa pode t_2 pode ser executada de 2 maneiras; $\ldots$; a tarefa t_{10} pode ser executada de 2 maneiras.

Assim pelo PM, existem $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{\text{10 vezes}} = 2^{10} = 1.024$ sequências , incluindo a que representa a sala fechada.

Daí existem $1024 - 1 = 1023$ maneiras de abrir a sala.

A resposta que está no livro traduz exatamente o raciocínio do segundo aluno: $(2^{10}) - 1 = 1023$. Mas, perguntaria o aluno que resolveu o problema pelo primeiro raciocínio: se houvesse a necessidade de uma perícia no local para descobrir a maneira como a sala foi aberta, a sequência como as portas foram abertas não importaria?

Fazendo uma análise dos raciocínios apresentados acima, e não tendo em mente qual foi exatamente a intenção do autor do enunciado do problema, percebemos que a resolução de um problema de análise combinatória pode depender do contexto no qual o aluno acredita que o problema está inserido. Daí, surge a necessidade do professor, quando abordando problemas deste tipo, tentar melhorar a redação do problema de modo a tentar evitar que os alunos façam interpretações diferentes daquela pretendida pelo professor.

Observe agora o enunciado de outro problema do mesmo livro [Hazzan, 2007]:

> De quantas formas podemos preencher um cartão da loteria esportiva, com um único prognóstico duplo e todos os outros, simples?

Será que todos os alunos que têm contato com este problema sabem exatamente o que *loteria esportiva* significa? Será que todos sabem o como *preencher um cartão de loteria esportiva*? Será que todos sabem o que significa *prognóstico duplo*?

Observe que, em um contexto mais geral, faltam no enunciado deste problema informações relevantes para a sua interpretação e resolução.

3.2 Estruturas e configurações

Além da falta de formação do professor, da didática equivocada para o ensino de análise combinatória, da divisão do capítulo de análise combinatória em pseudos ramos nos livros didáticos, e da má formulação dos enunciados, identificamos ainda uma outra dificuldade que os alunos enfrentam na hora de resolver os problemas. Esta talvez seja a principal: decicir qual é o tipo de objeto combinatório que está sendo abordado; se é arranjo, se é permutação, se é combinação, ou se é, ainda, um objeto de natureza completamente diferente da dos anteriores. Essa dificuldade está associada a um problema de construção, pois segundo R. Nogueira:

> A resolução de um problema de contagem pressupõe a de um problema de construção, já que, racionalmente, não se pode quantificar uma pluralidade sem a idealização clara de seu processo genético [Nogueira, 1972].

Ainda, segundo o mesmo autor:

> Defeito frequente entre iniciantes é a tendência de advinhar as respostas dos problemas de contagem, sem qualquer análise do correspondente processo construtivo. Superficialidade, medo de pensar, displicência mental, seja o que for, essa tendência é incompatível, com a Análise Combinatória.

Daí, para resolvermos problemas básicos de análise combinatória, com eficiência, devemos definir com clareza e objetividade os elementos que serão contados, assim como as regras e relações entre os elementos que o formam. Descrevendo um elemento do conjunto cujos elementos queremos contar, e a regras e relações dos elementos que o formam, estaremos mais capacitados a contar seus elementos sem que seja necessário listá-los, pois esta pode ser uma tarefa árdua ou, até mesmo, impossível. Para isto precisamos de algumas definições.

Uma *estrutura* consiste de:

- Um conjunto de *objetos básicos*, usualmente particionado em subconjuntos;
- Uma ou mais operações que, quando aplicadas a objetos básicos fornecem objetos como resultados;
- Uma ou mais relações que dizem como os objetos podem ser organizados.

Exemplo 6 (a) Um exemplo bem conhecido de estrutura é a estrutura dos números naturais com adição, multiplicação e ordem, que consiste do seguinte:

- O conjunto $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, dos números naturais;
- As operações $+$ e $\cdot$, de adição e multiplicação de números naturais;
- A relação $\leq$ de ordem entre números naturais.

(b) Uma estrutura ligeiramente diferente mas estritamente relacionada com a anterior, é a estrutura dos números naturais com números primos, adição, multiplicação, ordem e divisibilidade, que consiste do seguinte:

- Os conjuntos $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ e $\Pi = \{2, 3, 5, 7, 11, \ldots\}$, dos números naturais e dos números primos;

- As operações $+$ e $\cdot$, de adição e multiplicação de números naturais;

- As relações $\leq$ e $|$, de ordem e divisibilidade entre números naturais.

(c) Uma estrutura com teor um pouco mais combinatório que as anteriores consiste do seguinte:

- O conjunto $T = \{\text{América}, \text{Bangu}, \text{Campo Grande}, \ldots, \text{Tigres}\}$, dos times de futebol do Campeonato Carioca;

- A operação $\{\,,\}$, que quando aplicada a dois times de futebol $t_1, t_2 \in T$, forma um par não-ordenado $\{t_1, t_2\}$, constituido pelos dois times t_1 e t_2.

Aplicando sucessivamente a operação aos elementos do conjunto T, **dois de cada vez e tomando o cuidado de não aplicar a operação a elementos aos quais ela já foi aplicada anteriormente**, podemos formar objetos mais complexos, que chamamos de *rodadas*. Por exemplo, podemos formar a rodada

$$\{\{\text{América}, \text{Bangu}\}, \{\text{Campo-Grande}, \text{Vasco}\}, \ldots, \{\text{Flamengo}, \text{Fluminense}\}\}.$$

Uma estrutura é *finita* se todos os conjuntos, operações e relações envolvidas são finitos. A partir de estruturas finitas, podemos construir objetos, de acordo com certas especificações.

Exemplo 7 A partir da estrutura dada pelo conjunto finito

$$T = \{\text{América}, \text{Bangu}, \text{Campo Grande}, \ldots, \text{Tigres}\}$$

e da operação

$$\{\,,\},$$

podemos construir rodadas, como

$$\{\{\text{América}, \text{Bangu}\}, \{\text{Campo-Grande}, \text{Vasco}\}, \ldots, \{\text{Flamengo}, \text{Fluminense}\}\}.$$

Configurações são, usualmente, dadas por:

- uma estrutura finita, ou seja, uma especificação de quais são os objetos básicos usados na formação das configurações e de que recursos estão disponíveis para esta formação;
- uma especificação de como os objetos básicos podem ser agrupados para formar as configurações.

3.3 A didática dos princípios de contagem

Dados uma estrutura finita e uma especificação de como uma configuração é formada a partir dos objetos básicos por meio das operações e relações, pode ser que existam ou não configurações satisfazendo a especificação dada. Podemos, então, querer decidir se estas configurações <u>existem</u> ou não (*problema de existência*); no caso positivo, podemos querer <u>gerar</u> todas estas configurações (*problema de enumeração*); e em casos mais específicos, podemos querer <u>contar</u> o número possível de tais configurações (*problema de contagem*). Estes dois últimos são os tipos de problemas que são o objetivo principal da <u>análise combinatória</u>: (1) gerar todas configurações satisfazendo a uma dada especificação ou (2) contar o número total de configurações satisfazendo a uma dada especificação.

Definidas a estrutura e a configuração, podemos apresentar um método da combinatória básica de contagem, que além de permitir aos professores e alunos o repensar dos enunciados dos problemas abordados nos livros, para uma reformulação simples e objetiva, permite também soluções mais simples e objetivas. O diferencial desse método é permitir aos professores e aos alunos decidir com exatidão a natureza do problema em questão, conduzindo a resolução correta.

A didática para a análise combinatória, baseada nos princípios básicos de contagem, pode ser sumarizada nos seguintes passos:

1. Leitura e releitura atenta do enunciado do problema;

2. Identificar a configuração em questão;

3. Compreender como uma tal configuração pode ser formada a partir de objetos mais básicos, dados no problema;

4. Obter uma especificação/descrição da configuração, de maneira que cada exemplar específico possa ser formada de acordo com esta especificação/descrição e somente estes exemplares possam ser assim formados;

5. Aplicar os princípios básicos de contagem, de acordo com a especificação obtida, para obter o número de configurações possíveis.

Para descrever com mais detalhes como esta didática é aplicada na resolução de problemas de análise combinatória, vamos apresentar, no próximo capítulo, os princípios básicos de contagem.

Capítulo 4

Princípios de contagem

Neste capítulo fazemos uma descrição breve, porém precisa, de cada princípio básico de contagem, com um exemplo de sua aplicação. Os princípios apresentados são o Princípio da Bijeção, o Princípio k para 1, o Principio da Adição, o Princípio da Inclusão-Exclusão e o Princípio da Multiplicação. Cada princípio é apresentado e aplicado isoladamente, o que faz com que os exemplos tratados sejam resolvidos de forma simples e direta. Exemplos mais elaborados da aplicação conjunta dos princípios serão apresentados no capítulo seguinte.

4.1 Princípio da bijeção

O *Princípio da Bijeção*, PB, é um princípio de contagem que pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto X, simplesmente pela troca de X por um outro conjunto A, para o qual já sabemos determinar $\#(A)$. Para enunciar o PB mais precisamente, usaremos a noção de bijeção entre dois conjuntos.

Estabelecemos uma *bijeção* entre dois conjuntos finitos X e A quando associamos os elementos de X aos elementos de A, de modo que cada elemento de X está associado a um único elemento de A e cada elemento de A está associado a um único elemento de X.

Exemplo 8 Dados $X = \{1, 2, 3, 4\}$ e $A = \{1, 4, 9, 16\}$, temos que a figura

$$\begin{array}{ccc} 1 & \Leftrightarrow & 1 \\ 2 & \Leftrightarrow & 4 \\ 3 & \Leftrightarrow & 9 \\ 4 & \Leftrightarrow & 16 \end{array}$$

estabelece uma bijeção entre X e A.

A ideia de que para estabelecer uma bijeção entre os conjuntos X e A devemos corresponder os elementos de X aos elementos de A de maneira que cada elemento de X corresponda a um único elemento de A e vice-versa, nos leva a considerar que quando estabelecemos uma bijeção entre dois conjuntos, eles possuem a mesma quantidade de elementos. Mais formalmente temos:

> **Princípio da Bijeção:** Seja X um conjunto finito do qual queremos determinar o número de elementos.
> Se A é um conjunto tal que existe uma bijeção entre X e A, então $\#(X) = \#(A)$.

Na prática, o PB deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, a primeira vista, determinar.

2. Transformamos, através de uma bijeção, o conjunto X em um conjunto A cujo número de elementos sabemos determinar diretamente.

3. Aplicamos o PB e concluímos que X tem o mesmo número de elementos que A.

Como um exemplo da aplicação desta técnica na resolução de problemas de contagem, vamos resolver o seguinte problema.

Exemplo 9 Determine o número de elementos do conjunto $\{57, 58, 59, \ldots, 723\}$.

Resolução:

Seja $X = \{57, 58, 59, \ldots, 723\}$, o conjunto dado.

Pelo PB, se encontrarmos um conjunto A, do qual sabemos determinar o número de elementos, e uma bijeção entre X e A, o problema está resolvido.

Observe que se A tiver a forma $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, então, sabemos determinar por inspeção direta, que A tem n elementos.

Existe uma maneira de "transformar" o conjunto X num conjunto da forma $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ por meio de uma bijeção: basta subtrair 56 unidades de cada elemento de X. Assim, tomando $A = \{57 - 56, 58 - 56, 59 - 56, \ldots, 723 - 56\} = \{1, 2, 3, \ldots, 667\}$, sabemos que A possui 667 elementos.

Assim, pelo PB, temos que $\#(X) = \#(A) = 667$.

4.2 Princípio k para 1

O *Princípio k para 1*, Pk1, é um princípio de contagem que pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto X, quando sabemos que cada elemento de X corresponde a k elementos exclusivos de um certo conjunto A, para o qual sabemos determinar $\#(A)$. Para enunciar o Pk1 mais precisamente, usaremos a noção de função k para 1 de um conjunto A para um conjunto X.

Estabelecemos uma *função k para* 1 de um conjunto A para um conjunto X quando associamos os elementos de A aos elementos de X, de modo que k elementos de A estão associados exclusivamente a cada elemento de X, de maneira a não sobrar elementos em X. Em outras palavras, se A e X são conjuntos finitos, uma *função k para* 1 de A em X, é uma função que associa elementos de A a elementos de X de maneira que:

– Cada k elementos de A estão associados a 1 elemento de X.

– Cada elemento de X é o associado de exatamente k elementos de A.

Exemplo 10 Dados $A = \{1, 2, \ldots, 99\}$ e $X = \{1, 3, \ldots, 33\}$, temos que a figura

$$\begin{array}{ccc}
1 & \searrow & \\
2 & \rightarrow & 1 \\
3 & \nearrow & \\
 & & \\
4 & \searrow & \\
5 & \rightarrow & 2 \\
6 & \nearrow & \\
 & & \\
\ldots & & \\
 & & \\
97 & \searrow & \\
98 & \rightarrow & 33 \\
99 & \nearrow &
\end{array}$$

estabelece uma função 3 para 1 de A para X.

A ideia de que, para estabelecer uma função k para 1 de um conjunto finito A para um conjunto finito X, devemos corresponder os elementos de A aos elementos de X de maneira que k elementos de A correspondam a um único elemento de X e cada elemento de X seja o correspondente de exatamente k elementos de A, nos leva a considerar que quando estabelecemos uma função k para 1 de A em X, o número de elementos de X é igual ao número de elementos de A dividido por k, ou seja, o número de elementos de A é igual a k vezes o número de elementos de X. Mais formalmente temos:

> **Princípio k para 1:** Seja X um conjunto finito do qual queremos determinar o número de elementos.
> Se A é um conjunto tal que existe uma função k para 1 de A em X, então $\#(X) = \dfrac{\#(A)}{k}$.

Na prática, o Princípio k para 1 deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, a primeira vista, determinar.

2. Identificamos que existe uma função k para 1 de um conjunto A em X, de modo que sabemos determinar o número de elemento de A.

3. Aplicamos o Pk1 e concluímos que X tem $\dfrac{\#(A)}{k}$ elementos.

Um exemplo muito importante da aplicação desta técnica, na resolução de problemas de contagem, será visto no Capítulo 5.

4.3 Princípio da adição

O que chamamos de Princípio da Adição consiste, na verdade, de uma série de princípios, um para cada número natural $n \geq 2$. Vamos descrever detalhadamente o caso em que $n = 2$ e, a partir daí, generalizar para o caso em que n é arbitrário.

O *Princípio da Adição Para Dois Conjuntos*, PA2 , é um princípio de contagem que pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto X, simplesmente pela troca de X por dois conjuntos menores A e B, que não possuem elementos em comum, para os quais sabemos determinar $\#(A)$ e $\#(B)$. Para enunciar o PA2 precisamente, usaremos a noção de bipartição em dois conjuntos.

Estabelecemos uma *bipartição* de um conjunto finito X quando encontramos dois subconjuntos não vazios A e B de X, tais que $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$.

Exemplo 11 Dado $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, temos que os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4\}$ estabelecem uma bipartição de X.

A ideia de que, para estabelecer uma bipartição de X, separamos os elementos de X em dois conjuntos A e B de maneira que se um elemento de X pertence a A, não pode pertencer a B e vice-versa, nos leva a considerar que quando estabelecemos uma bipartição de X em dois conjuntos A e B, a soma do número de elementos de A com o número de elementos de B é igual ao número de elementos de X. Mais formalmente temos:

> **Princípio da Adição para 2 conjuntos (PA2):** Seja X um conjunto finito do qual queremos determinar o número de elementos. Se A e B são subconjuntos de X tais que $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$, então $\#(X) = \#(A) + \#(B)$.

Na prática, o PA2 deve ser aplicado na seguinte situação:

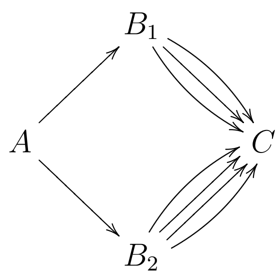
1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, a primeira vista, determinar.

2. Transformamos, por meio de uma bipartição, o conjunto X em dois conjuntos A e B cujos números de elementos sabemos determinar.

3. Aplicamos o PA2 e concluímos que o número de elementos de X é igual ao número de elementos que A mais o número de elementos de B.

Como exemplo da aplicação desta técnica na resolução de problemas de contagem, vamos resolver o seguinte problema.

Exemplo 12 De acordo com a figura baixo, existem apenas dois modos de atingir a cidade C partindo da cidade A.



Uma delas é ir até uma cidade intermediária B_1 e de lá ir para C; a outra é ir até uma outra cidade intermediária B_2 e de lá ir para C. Sabendo que não existe nenhuma maneira de ir diretamente de B_1 para B_2, nem de A para C, e que existe uma estrada ligando A a B_1; três ligando B_1 a C; uma ligando A a B_2; e quatro ligando B_2 a C; determine o número de percursos diferentes que podem ser feitos para, partindo de A, atingir C pela primeira vez?

Resolução:

Observe que um percurso de A para C passa, necessariamente, por B_1 ou B_2. E que não existem percursos comuns de A para C que passam por B_1, e de A para

C que passam por B_2. Assim, o conjunto X dos percursos de A para C pode ser biparticionado em dois subconjuntos: o conjunto X_1 dos percursos que passam por B_1 e o conjunto X_2 dos percursos que passam por B_2.

De acordo com o PA2, se determinamos $\#(X_1)$ e $\#(X_2)$, o problema está resolvido.

Se escolhemos partir de A para B_1, encontramos lá, três estradas partindo de B_2 para C. Daí, temos 3 percursos partindo de A, passando por B_1, e chegando em C, ou seja, $\#(X_1) = 3$.

Se escolhemos partir de A para B_2, encontramos lá, quatro estradas partindo de B_2 para C. Daí, temos quatro percursos de A, passando por B_2, e chegando em C, ou seja, $\#(X_2) = 4$.

Assim, pelo PA2, temos $\#(X) = \#(X_1) + \#(X_2) = 3 + 4 = 7$, ou seja, existem sete percursos diferentes partindo de A e chegando em C.

Este princípio pode ser generalizado para um número qualquer de conjuntos, através da generalização da noção de bipartição.

Seja A um conjunto e $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ uma família de subconjuntos não vazios de A. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma *n-partição* de A se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) Os elementos de $\mathcal{B}$ são dois a dois disjuntos, i.e. $B_i \cap B_j = \emptyset$, para $1 \leq i \neq j \leq n$.

(2) Os elementos de $\mathcal{B}$ exaurem A, i.e. $\bigcup_{1 \leq i \leq n} B_i = A$.

> **Princípio da Adição para n conjuntos (PAn):** Seja X um conjunto finito do qual queremos determinar o número de elementos.
> Se $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ é uma n-partição de X, então
>
> $$\#(X) = \Sigma_{i=1}^{n} A_i.$$

Na prática, o PAn deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, a primeira vista, determinar.

2. Transformamos, através de uma n-partição, o conjunto X em n conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ cujos números de elementos sabemos determinar.

3. Aplicamos o PAn e concluímos que o número de elementos de X é igual ao número de elementos que A_1 mais o número de elementos de A_2 ... mais o número de elementos de A_n.

Como exemplo da aplicação desta técnica na resolução de problemas de contagem, vamos resolver o seguinte problema.

Exemplo 13 Uma faculdade oferece três cursos de graduação: matemática, engenharia e letras. O curso de Matemática é oferecido em duas modalidades: licenciatura plena e bacharelado, uma das quais o aluno deve escolher após o quarto período. O curso de engenharia é oferecido em três modalidades: mecânica, elétrica e química, uma das quais o aluno deve escolher após o quinto período. E o curso de letras é oferecido em quatro modalidades: inglês, francês, japonês e literatura brasileira, uma das quais o aluno deve escolher após o quarto período. Um aluno que deseja ingressar nessa faculdade e terminar um dos cursos, tem quantas possibilidades de formação?

Resolução:

De acordo com o enunciado do problema, cada formação consiste de um curso e uma das modadalidades oferecidas nesse curso. Assim, o conjunto X das formações pode escolher pode ser particionado em três subconjuntos: o conjunto X_1 das formações em matemática; o conjunto X_2 das formações em engenharia; e o conjunto X_3 das formações em letras.

De acordo com o PA3, se determinamos $\#(X_1)$, $\#(X_2)$ e $\#(X_3)$, o problema está resolvido.

Se o aluno escolhe formação em matemática, ele terá que escolher entre as modalidades licenciatura e bacharelado. Daí, temos duas possibilidades de formação e $\#(X_1) = 2$.

Se o aluno escolher formação em engenharia, ele terá que escolher entre as modalidades mecânica, elétrica e química. Daí, temos três possibilidades de formação e $\#(X_2) = 3$.

Se o aluno escolher formação em letras, ele terá que escolher entre as modalidades inglês, francês, japonês e literatura brasileira. Daí, temos quatro possibilidades de formação e $\#(X_3) = 4$.

Assim, pelo PA3, temos $\#(X) = \#(X_1) + \#(X_2) + \#(X_3) = 2 + 3 + 4 = 9$, ou seja, existem nove possibilidades de formação para um aluno que deseja ingressar nessa faculdade e terminar um dos cursos.

4.4 Princípio da inclusão-exclusão

O que chamamos de Princípio da inclusão-exclusão consiste, na verdade, de uma série de princípios, um para cada número natural $n \geq 2$. Vamos descrever detalhadamente o caso em que $n = 2$ e, a partir daí, generalizar para o caso em que n é arbitrário.

O *Princípio da inclusão-exclusão para dois conjuntos*, PIE2, é uma generalização do PA2 para o caso em que A e B podem possuir elementos em comum, ou seja, é um princípio de contagem que pode ser usado na determinação do número de elementos de um dado conjunto X, simplesmente pela troca de X por dois conjuntos menores A e B, que possuem ou não elementos em comum, para os quais sabemos determinar $\#(A)$, $\#(B)$ e $\#(A \cap B)$.

A ideia é que para encontrar o número de elementos de X, sabendo que X pode ser trocado por dois conjuntos A e B, para os quais podemos determinar o número de elementos de A, o número de elementos de B e o número de elementos de $A \cap B$, é que quando somamos o número de elementos de A, com o número de elementos de B, a quantidade de elementos comuns aos conjutos A e B, ou seja o número de elementos em $A \cap B$ é contada duas vezes. Daí, para eliminar esta dupla contagem da soma obtida, devemos descontar uma vez o número de elementos comuns aos conjuntos A e B, ou seja descontar uma vez o número de elementos de $A \cap B$. Mais formalmente temos:

> **Princípio da Inclusão-Exclusão para 2 conjuntos (PIE2):** Seja X um conjunto finito do qual queremos determinar o número de elementos.
> Se A e B são subconjuntos de X tais que $X = A \cup B$, então $\#(X) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Na prática, o PIE2 deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, a primeira vista, determinar.

2. Identificamos o conjunto X como a união de dois subconjuntos A e B, para os quais sabemos determinar o número de elementos de A, o número de elementos de B e o número de elementos de $A \cap B$.

3. Aplicamos o PIE2 e concluímos que o número de elementos de X é igual ao número de elementos que A, mais o número de elementos de B, menos o número de elementos de $A \cap B$.

Como um exemplo da aplicação desta técnica na resolução de problemas de contagem, vamos resolver o seguinte problema.

Exemplo 14 Em uma campanha de vacinação contra meningite e sarampo 2.800 pessoas compareceram a um posto de saúde. Ao término da campanha verificouse que, neste posto, 2.332 pessoas tomaram vacina contra meningite, 1.898 contra sarampo e 1.580 pessoas tomaram as duas vacinas. Algumas pessoas que compareceram ao posto não puderam tomar nenhuma das duas vacinas pois o estoque de vacinas havia acabado. Quantas pessoas não tomaram nenhuma das duas vacinas?

Resolução:

Para calcular o número de pessoas que não tomou nenhuma das duas vacinas, podemos adotar a seguinte estratégia: calcular o número de pessoas que tomou pelo menos uma vacina e subtrair este número do total do número de pessoas que compareceram ao posto.

Seja X o conjunto das pessoas que tomaram pelo menos uma vacina. Temos que $X = M \cup S$, onde M é o conjunto das pessoas que tomou a vacina contra meningite e S é o conjunto de pessoas que tomou a vacina contra sarampo. De acordo com o PIE, se determinamos $\#(M)$, $\#(S)$ e $\#(M \cap S)$, o problema está resolvido.

De acordo com os dados do problema, temos $\#(M) = 2.332$, $\#(S) = 1.898$ e $\#(M \cap S) = 1.580$.

Assim, pelo PIE, $\#(M \cup S) = \#(M) + \#(S) - \#(M \cap S) = 2.332 + 1.898 - 1.580 = 2.650$, ou seja, 2.650 pessoas tomaram pelo menos uma vacina.

Como 2.800 pessoas compareceram ao posto, temos que no máximo $2.800 - 2.650 = 150$ pessoas não tomaram nenhuma vacina.

Este princípio pode ser generalizado para um número qualquer de conjuntos, embora seu enunciado se torne um pouco complexo, a primeira vista.

Princípio da Inclusão-Exclusão para n conjuntos (PIEn): Seja X um conjunto finito do qual queremos determinar o número de elementos. Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são subconjuntos de X tais que $X = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Então,

$$\begin{aligned}\#(X) \;=\; & \textstyle\sum_{1\leq i\leq n} \#(A_i) - \\ & \textstyle\sum_{1\leq i<j\leq n} \#(A_i \cap A_j) + \\ & \textstyle\sum_{1\leq i<j<k\leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \\ & \ldots + \\ & (-1)^{n+1} \cdot \#(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n).\end{aligned}$$

Na prática, o PIEn deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X que não é fácil, a primeira vista, determinar.

2. Identificamos o conjunto X como a união de n subconjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, para os quais sabemos determinar o número de elementos de $A_1, A_2, \ldots, A_n$, respectivamente; o número de elementos de $A_i \cap A_j$, $1 \leq i < j \leq n$; o número de elementos de $(A_i \cap A_j \cap A_k)$, $1 \leq i < j < k \leq n$; $\ldots$; e o número de elementos de $A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n$.

3. Aplicamos o PIEn e concluímos que o número de elementos de X é igual a soma do número de elementos de cada A_i, menos a soma do número de elementos de $A_i \cap A_j$, $1 \leq i < j \leq n$; mais a soma do número de elementos de $(A_i \cap A_j \cap A_k)$, $1 \leq i < j < k \leq n$; $\ldots$; mais o número de elementos de $A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n$ multiplicado por $(-1)^{n+1}$.

4.5 Princípio da multiplicação

O que chamamos de Princípio da Multiplicação, consiste na verdade, de uma série de princípios, um para cada número natural $n \geq 2$. Vamos descrever detalhadamente o caso em que $n = 2$ e, a partir daí, generalizar para o caso em que n é arbitrário.

O *Princípio da Multiplicação para Dois Conjuntos*, PM2, é um princípio de contagem que pode ser usado na determinação do número de elementos de um conjunto X quando sabemos que cada elemento de X pode ser formado pela tomada de duas decisões: a primeira referente a elementos de um certo conjunto A e a segunda referente a elementos de um certo conjunto B, de modo que a primeira decisão d_1 pode ser tomada de m_1 maneiras e, para cada maneira em que a decisão d_1 pode ser tomada, a segunda decisão d_2 pode ser tomada de m_2 maneiras. Como cada maneira de tomar a decisão d_1 acarreta na mesma quantidade de maneiras de tomar a decisão d_2 somos levados a considerar que o número de maneiras de tomar a decisão d_1 seguida da decisão d_2 é o produto do número de maneiras de tomar a decisão d_1 pelo número de maneiras de tomar a decisão d_2.

> **Princípio da Multiplicação (PM):** Seja X um conjunto finito do qual queremos determinar o número de elementos.
> Se cada elemento de X pode ser formado pela tomada de duas decisões d_1 e d_2, de maneira que:
>
> - A decisão d_1 pode ser tomada de m_1 maneiras.
> - Para cada maneira possível em que a decisão d_1 pode ser tomada, a decisão d_2 pode ser tomada de m_2 maneiras.
>
> Então, $\#(X) = m_1 \cdot m_2$.

Na prática, o PM deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X, onde cada elemento de X pode ser formado pela tomada de duas decisões, d_1 e d_2.

2. Concluímos que a decisão d_1 pode ser tomada de m_1 maneiras.

3. Concluímos que, para cada uma das maneiras em que a decisão d_1 pode ser tomada, a decisão d_2 pode ser tomada de m_2 maneiras.

4. Aplicamos o PM2 e concluímos que o número de elementos de X é igual a $m_1 \cdot m_2$.

Como um exemplo da aplicação desta técnica na resolução de problemas de contagem, vamos resolver o seguinte problema.

Exemplo 15 O controle de um jogo eletrônico de lutas é composto de duas alavancas que se movimentam, cada uma, nas quatro direções: norte, sul, leste e oeste. Em um certo instante do jogo, um golpe de caratê é aplicado por um personagem do jogo, quando o seu controlador aciona as duas alavancas simultameamente, cada uma, em uma das quatro direções. Qual é o número total de golpes de caratê que pode ser aplicado por um personagem do jogo, em um certo instante?

Resolução:

Para o personagem do jogo aplicar um golpe, em um certo instante, é necessário, que seu controlador, coloque a primeira alavanca em uma das quatro posições e, simultaneamente, coloque a segunda alavanca em uma das quatro posições.

Assim, um golpe do jogo pode ser formado pela tomada das seguintes decisões:

d_1 : escolher uma direção para a primeira alavanca;

d_2 : escolher uma direção para a segunda alavanca.

A decisão d_1 pode ser tomada de 4 maneiras. A decisão d_2 também pode ser tomada de 4 maneiras.

Daí, pelo PM2, temos um total de $4 \times 4 = 16$ golpes de caratê que podem ser aplicados por um personagem do jogo, em um certo instante.

Este princípio pode ser generalizado para um número qualquer de decisões, de maneira direta.

Princípio da Multiplicação para n conjuntos (PMn): Seja X um conjunto finito do qual queremos determinar o número de elementos.
Se cada elemento de X pode ser formado pela tomada de n decisões $d_1, d_2, \ldots, d_n$, de maneira que:

- A decisão d_1 pode ser tomada de m_1 maneiras.
- Para cada maneira possível em que a decisão d_1 pode ser tomada, a decisão d_2 pode ser tomada de m_2 maneiras.
- Para cada par de maneiras possíveis em que as decisões d_1 e d_2 podem ser tomadas, a decisão d_3 pode ser tomada de m_3 maneiras.

  ...
- Para cada sequência de maneiras possíveis em que as decisões $d_1, d_2, d_3, \ldots, d_{n-1}$ podem ser tomadas, a decisão d_n pode ser tomada de m_n maneiras.

Então, $\#(X) = m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Na prática, o PMn deve ser aplicado na seguinte situação:

1. Queremos determinar o número de elementos de um conjunto X, onde cada elemento de X pode ser formado pela tomada de n decisões, $d_1, d_2, \ldots, d_n$.

2. Concluímos que a decisão d_1 pode ser tomada de m_1 maneiras.

3. Concluímos que, para cada uma das maneiras em que a decisão d_1 pode ser tomada, a decisão d_2 pode ser tomada de m_2 maneiras.

   ...

4. Concluímos que para cada sequência de maneiras em que as decisões d_1, d_2, d_3, ..., d_{n-1} podem ser tomadas sucessivamente, a decisão d_n pode ser tomada de m_n maneiras.

   Aplicamos o PMn e concluímos que o número de elementos de X é igual a $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \ldots \cdot m_n$.

Capítulo 5

Exemplos de aplicação dos princípios

Neste capítulo, apresentamos uma série de exemplos de aplicações dos princípios de contagem na resolução de exercícios. Os princípios são aplicados tanto isoladamente quanto em conjunto. Nosso objetivo não é fazer nem uma descrição detalhada nem um estudo completo das potencialidades didáticas do uso dos princípios, mas apenas familiarizar o leitor com suas aplicações.

5.1 Princípio da multiplicação

Vamos exemplificar o uso do PM na resolução de problemas que envolvem configurações construídas a partir de objetos tomados em conjuntos distintos. Vamos exemplificar casos envolvenfo 2 ou 3 conjuntos. Para mais de 3 conjuntos, a resolução é inteiramente análoga.

---

1. *Um homem vai a um restaurante disposto a comer só um prato de carne e uma só sobremesa. O cardápio oferece oito pratos distintos de carne e cinco pratos diferentes de sobremesa. De quantas formas o homem pode fazer a sua refeição?*

Resolução:

Uma *refeição* consiste de um só um prato de carne seguido de um só prato de sobremesa. Dispomos de 8 pratos distintos de carne e 5 pratos distintos de sobremesa. Quantas refeições podem ser formadas?

Para formar uma refeição, executamos duas tarefas:

$$\begin{array}{lcl} t_1 & : & \text{escolher um prato de carne;} \\ t_2 & : & \text{escolher um prato de sobremesa.} \end{array}$$

Temos que a tarefa t_1 pode ser executada de 8 maneiras, e para cada maneira em que a tarefa t_1 é executada, a tarefa t_2 pode ser executada de 5 maneiras. Assim pelo PM, existem $8 \times 5 = 40$ refeições.

2. *Um homem possui 10 ternos, 12 camisas e 5 pares de sapatos. De quantas formas ele poderá vestir um terno, uma camisa e um par de sapatos?*

Resolução:

Uma *vestimenta* consiste de um terno, uma camisa e um par de sapatos. Dispomos de 10 ternos, 12 camisas e 5 pares de sapatos. Quantas vestimentas podem ser formadas?

Para formar uma vestimenta executamos 3 tarefas:

$$\begin{array}{lcl} t_1 & : & \text{escolher um terno;} \\ t_2 & : & \text{escolher uma camisa:} \\ t_3 & : & \text{escolher um par de sapatos.} \end{array}$$

Temos que a tarefa t_1 pode ser executada de 10 maneiras, e para cada maneira em que a tarefa t_1 é executada, a tarefa t_2 pode ser executada de 12 maneiras, e para cada par de maneiras executadas t_1 e t_2, temos que a tarefa t_3 pode ser executada de 5 maneiras. Assim pelo PM, existem $10 \times 12 \times 5 = 600$ formas distintas que o homem poderá usar uma vestimenta.

Vamos, agora, exemplificar o uso do PM na resolução de problemas que envolvem configurações construídas a partir de objetos tomados em um mesmo conjunto. Vamos exemplificar os casos em que o conjunto possui 2 elementos. Para conjuntos com mais de 2 elementos, a resolução é inteiramente análoga.

---

1. *De quantas formas podemos responder à 12 perguntas de um questionário, cujas respostas para cada pergunta são: sim ou não?*

Resolução:

Um *gabarito* consiste de uma sequência de 12 respostas. Dispomos da resposta sim e da resposta não. Quantos gabaritos podem ser formados?

Para formar um *gabarito*, podemos executar 12 tarefas análogas:

$$\begin{array}{lcl} t_1 & : & \text{responder a primeira pergunta;} \\ t_2 & : & \text{responder a segunda pergunta;} \\ \vdots & & \\ t_i & : & \text{responder a } i\text{-ésima pergunta;} \\ \vdots & & \\ t_{12} & : & \text{responder a décima segunda pergunta.} \end{array}$$

Temos que a tarefa t_1 pode ser executada de 2 maneiras; a tarefa t_2 pode ser executada de 2 maneiras; ...; a tarefa t_{12} pode ser executada de 2 maneiras. Assim pelo PM, existem $\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{12 \text{ vezes}} = 2^{12} = 4096$ gabaritos.

5.2 Princípio da adição

Vamos exemplificar o uso do PA na resolução de problemas que envolvem a partição do universo das configurações em 2 e 3 conjuntos. Para mais de 3 cojuntos, a resolução é inteiramente análoga. Vamos, também, resolver um problema pela aplicação do PA que possui uma resolução mais simples por aplicação do PM.

---

1. *Existem apenas dois modos de atingir uma cidade X partindo de outra A. Uma delas é ir até uma cidade intermediária B e de lá atingir X; a outra é ir até C e de lá chegar a X.*

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[dr] & \\
A \arrow[ur] \arrow[dr] & & X \\
 & C \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Existem 10 *estradas ligando A e B;* 12 *ligando B a X;* 5 *ligando A a C;* 8 *ligando C a X; nenhuma ligação direta entre B e C e nenhuma ligação direta entre A e X. Qual o número de percursos diferentes que podem ser feitos para, partindo de A, atingir X pela primeira vez?*

Resolução:

Um *caminho* de uma cidade C até outra cidade D, parte de C e chega em D sem passar por cidades intermediárias. Um *percurso* de uma cidade C até outra cidade D é uma sequência de caminhos que partem de C e chegam em D.

Existem 10 caminhos de A até B; 12 de B até X; 5 de A até C; 8 de C até X; nenhum caminho de A até X e nenhum caminho de B até C. Quantos percursos diferentes existem de A até X?

Seja P o conjunto dos percursos de A até X, que atingem X pela primeira vez. Vamos particionar P em dois subconjuntos:

$$\begin{array}{lcl} P_1 & : & \text{conjunto dos percursos em } P \text{ que passam por } B; \\ P_2 & : & \text{conjunto dos percursos em } P \text{ que passam por } C. \end{array}$$

Pois, observe que todo percurso de A até X, que atinge X pela primeira vez, passa por B ou por C; e que não existe percurso de A até X, que atinge X pela primeira vez, que passa por B e C simultaneamente.

Para formar um elemento de P_1 podemos executar duas tarefas:

$$\begin{array}{lcl} t_1 & : & \text{escolher um caminho de } A \text{ até } B; \\ t_2 & : & \text{escolher um caminho de } B \text{ até } X. \end{array}$$

A tarefa t_1 pode ser executada de 10 maneiras e para cada maneira de executar t_1, a tarefa t_2 pode ser executada de 12 maneiras. Assim, pelo PM, $\#(P_1) = 10 \times 12 = 120$.

Analogamante, para formar um elemento de P_2 podemos executar duas tarefas:

$$\begin{array}{lcl} t_1 & : & \text{escolher um caminho de } A \text{ até } C; \\ t_2 & : & \text{escolher um caminho de } C \text{ até } X. \end{array}$$

A tarefa t_1 pode ser executada de 5 maneiras e para cada maneira de executar t_1, a tarefa t_2 pode ser executada de 8 maneiras. Assim, pelo PM, $\#(P_2) = 5 \times 8 = 40$.

Logo, pelo PA, temos $\#(P) = \#(P_1) + \#(P_2) = 120 + 40 = 160$.

2. *De quantas maneiras diferentes um professor poderá escolher um ou mais estudantes de um grupo de 6 estudantes?*

Resolução, usando o PA:

Uma *patota* consiste de um ou mais estudantes. Dispomos de 6 estudantes. Quantas patotas existem?

Considere o conjunto P de todas as patotas. Vamos particionar P em 6 subconjuntos:

$$\begin{array}{lcl} P_1 & : & \text{conjunto das patotas com um estudante;} \\ P_2 & : & \text{conjunto das patotas com dois estudantes;} \\ P_3 & : & \text{conjunto das patotas com três estudantes;} \\ P_4 & : & \text{conjunto das patotas com quatro estudantes;} \\ P_5 & : & \text{conjunto das patotas com cinco estudantes} \\ P_6 & : & \text{conjunto das patotas com seis estudantes.} \end{array}$$

Observe que cada patota tem um número determinado n de estudantes, onde $1 \leq n \leq 6$.

Para formar um elemento de P_1 podemos executar uma tarefa:

$$t_1 \;:\; \text{escolher um estudante para formar a patota.}$$

A tarefa t_1 pode ser executada de 6 maneiras. Assim, $\#(P_1) = 6$.

Analogamante, para formar um elemento de P_2 podemos executar uma tarefa:

$$t_1 \;:\; \text{escolher (simultanemante) dois estudantes para formar a patota.}$$

A tarefa t_1 pode ser executada de $C(6,2)$ maneiras. Assim, $\#(P_2) = C(6,2)$.

Analogamente, temos que $\#(P_3) = C(6,3)$, $\#(P_4) = C(6,4)$, $\#(P_5) = C(6,5)$ e $\#(P_6) = C(6,6)$.

Logo, pelo PA, $\#(P) = \#(P_1) + \#(P_2) + \#(P_3) + \#(P_4) + \#(P_5) + \#(P_6) = 1 + 15 + 20 + 20 + 15 + 1 = 63$.

Resolução, usando o PM:

Vamos chamar de *patota vazia* a patota que não possua nenhum estudante. Vamos contar o total de patotas, incluindo a patota vazia, e descontar deste total uma unidade, obtendo, assim, o número de patotas.

Para formar uma patota, incluindo a patota vazia, dispondo de 6 estudantes, $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$, podemos executar 6 tarefas análogas:

$$\begin{aligned}
t_1 &: \text{decidir se o aluno } a_1 \text{ participa ou não da patota;}\\
t_2 &: \text{decidir se o aluno } a_2 \text{ participa ou não da patota;}\\
t_3 &: \text{decidir se o aluno } a_3 \text{ participa ou não da patota;}\\
t_4 &: \text{decidir se o aluno } a_4 \text{ participa ou não da patota;}\\
t_5 &: \text{decidir se o aluno } a_5 \text{ participa ou não da patota;}\\
t_6 &: \text{decidir se o aluno } a_6 \text{ participa ou não da patota.}
\end{aligned}$$

A tarefa t_1 pode ser executada de 2 maneiras; a tarefa t_2 pode ser executada de 2 maneiras; $\ldots$; a tarefa t_6 pode ser executada de duas maneiras.

Assim pelo PM, existem $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{\text{6 vezes}} = 2^6 = 64$ patotas, incluindo a patota vazia.

Daí existem $64 - 1 = 63$ patotas.

5.3 Princípio da bijeção

Inicialmente, vamos exemplificar o uso do PB na resolução de um problema simples, que consiste em determinar o número de elementos de um conjunto X. Para isso vamos transformar o conjunto X em um conjunto A, cujo número de elementos é facilmente determinado, por aplicação do PM. Em seguida, vamos generalizar o exemplo, utilizando o PB na dedução da conhecida fórmula para o cálculo do número de subconjutnos de um conjunto.

---

1. *Um conjunto possui quatro elementos. Quantos subconjuntos ele possui?*

Resolução:

Seja $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ um conjunto com quatro elementos.

Seja C o conjunto formado por todos os subconjuntos de A. Queremos determinar $\#(C)$. Pelo PB, se encontrarmos um conjunto S, do qual sabemos determinar o número de elementos, e uma bijeção entre C e S, o problema está resolvido.

Seja S o conjunto formado por todas as sequências de 4 elementos, cujos termos pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$. Por exemplo, $(0, 0, 0, 0)$ e $(0, 1, 0, 1)$ são elementos de S.

Existe uma bijeção entre C e S. De fato, observe que podemos corresponder os elementos de S aos elementos de C da seguinte maneira:

> Seja $s \in S$. O subconjunto C_s correspondente a s é definido de acordo com os termos de s do seguinte modo:
>
> (a) Se 1 é o primeiro termo de s, então $a_1 \in C_s$, caso contrário, $a_1 \notin C_s$;
>
> (b) Se 1 é o segundo termo de s, então $a_2 \in C_s$, caso contrário, $a_2 \notin C_s$;
>
> (c) Se 1 é o terceiro termo de s, então $a_3 \in C_s$, caso contrário, $a_3 \notin C_s$;
>
> (d) Se 1 é o quarto termo de s, então $a_4 \in C_s$, caso contrário, $a_4 \notin C_s$.

Dessa forma, definimos uma bijeção entre C e S.

Vamos, agora, calcular o número de elementos de S, usando o PB.

Para formar uma sequência $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de 4 elementos, cujos termos pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$, podemos executar 4 tarefas:

t_1 : decidir qual o elemento de $\{0, 1\}$ devemos colocar no lugar de x_1;
t_2 : decidir qual o elemento de $\{0, 1\}$ devemos colocar no lugar de x_2;
t_3 : decidir qual o elemento de $\{0, 1\}$ devemos colocar no lugar de x_3;
t_4 : decidir qual o elemento de $\{0, 1\}$ devemos colocar no lugar de x_4.

Temos que a tarefa t_1 pode ser executada de 2 maneiras; a tarefa t_2 pode ser executada de 2 maneiras; a tarefa t_3 pode ser executada de 2 maneiras; e a tarefa t_4 pode ser executada de duas maneiras.

Assim pelo PM, o conjunto S tem $\underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ vezes}} = 2^4 = 16$ elementos.

Logo, pelo PB, concluimos que C tem 16 elementos.

2. *Se um conjunto possui n elementos, então ele possui 2^n subconjuntos.*

Resolução:

Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ um conjunto com n elementos.

Seja C o conjunto formado por todos os subconjuntos de A. Queremos determinar $\#(C)$. Pelo PB, se encontrarmos um conjunto S do qual sabemos determinar o número de elementos e uma bijeção entre C e S, o problema está resolvido.

Seja S o conjunto formado por todas as sequências de n elementos, cujos termos pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$. Por exemplo, $\underbrace{(0,0,0,0,\ldots,0)}_{n \text{ termos}}$ e $\underbrace{(0,1,0,\ldots,0,1)}_{n \text{ termos}}$ são elementos de S.

Existe uma bijeção entre C e S. De fato, observe que podemos corresponder os elementos de S com elementos de C da seguinte maneira:

> Seja $s \in S$. O subconjunto C_s correspondente a s é definido de acordo com os termos de s do seguinte modo:
>
> (1) Examinamos o elemento a_1 de A e decidimos se ele faz parte ou não de C_s: Se 1 é o primeiro termo de s, então $a_1 \in C_s$, caso contrário, $a_1 \notin C_s$;
>
> (2) Examinamos o elemento a_2 de A e decidimos se ele faz parte ou não de C_s: Se 1 é o segundo termo de s, então $a_2 \in C_s$, caso contrário, $a_2 \notin C_s$;
>
> ...
>
> (i) Examinamos o elemento a_i de A e decidimos se ele faz parte ou não de C_s: Se 1 é o i-ésimo termo de s, então $a_i \in C_s$, caso contrário, $a_i \notin C_s$;

...

(n) Examinamos o elemento a_n de A e decidimos se ele faz parte ou não de C_s: Se 1 é o n-ésimo termo de s, então $a_n \in C_s$, caso contrário, $a_n \notin C_s$.

Dessa forma, definimos uma bijeção entre C e S.

Vamos, agora, calcular o número de elementos de S, usando o PB.

Para formar uma sequência $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elementos, cujos termos pertencem ao conjunto $\{0, 1\}$, podemos executar n tarefas:

$$\begin{array}{lcl} t_1 & : & \text{decidir qual o elemento de } \{0,1\} \text{ será } x_1; \\ t_2 & : & \text{decidir qual o elemento de } \{0,1\} \text{ será } x_2; \\ \vdots & & \vdots \\ t_i & : & \text{decidir qual o elemento de } \{0,1\} \text{ será } x_i; \\ \vdots & & \vdots \\ t_n & : & \text{decidir qual o elemento de } \{0,1\} \text{ será } x_n. \end{array}$$

A tarefa t_1 pode ser executada de 2 maneiras; a tarefa t_2 pode ser executada de 2 maneiras; ...; a tarefa t_i pode ser executada de 2 maneiras; ...; e a tarefa t_n pode ser executada de 2 maneiras.

Assim pelo PM, o conjunto S tem $\underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ vezes}} = 2^n$ elementos.

Logo, pelo PB, temos que C tem 2^n elementos.

5.4 Princípio k para 1

Inicialmente, vamos exemplificar o uso do Pk1 calculando o número de combinações de dois elementos de um conjunto específico, dado. Em seguida, vamos generalizar o exemplo, utilizando o Pk1 na dedução da conhecida fórmula para o cálculo do número de combinações de m elementos, tomados n a n.

1. *Seja* $A = \{a, b, c, d\}$ *um conjunto. Quantas combinações com de* 2 *elementos, de* A*, existem?*

Resolução:

Seja C o conjunto formado por todas as combinações dos quatro elementos de A, tomados dois a dois. Queremos determinar $\#(C)$. Pelo Pk1, se encontrarmos um conjunto P, do qual sabemos determinar o número de elementos, e uma função k para 1, adequada, de P para C, o problema está resolvido.

Para isto, observe, que cada combinação é um <u>subconjunto</u> de A, com dois elementos (distintos). Por exemplo, $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$ são combinações. E que cada combinação corresponde a dois pares ordenados que podem ser formados com elementos distintos de A. Por exemplo, a combinação $\{a, b\}$ corresponde aos pares ordenados (a, b) e (b, a).

Assim, primeiramente, vamos calcular o número de <u>pares ordenados</u> que podem ser formados com elementos distintos de A.

Para formar um par ordenado com coordenadas distintas escolhidas dentre os 4 elementos de $A = \{a, b, c, d\}$, podemos executar 2 tarefas:

t_1 : escolher um elemento para ser o primeiro elemento do par;
t_2 : escolher um elemento, diferente do já escolhido, para ser o segundo elemento do par.

A tarefa t_1 pode ser executada de 4 maneiras e a tarefa t_2 pode ser executada de 3 maneiras.

Assim pelo PM, existem $4 \times 3 = 12$ pares ordenados com coordenadas distintas escolhidas dentre os elementos de $A = \{a, b, c, d\}$.

Agora, vamos associar cada par ordenado contado acima a combinação formada pelos elementos que são as coordenadas do par ordenado. Por exemplo, o par ordenado (a, c) está associado a combinação $\{a, c\}$. Mas, como já vimos, pares ordenados formados pela mesma dupla de elementos distintos estão associados a mesma combinação. Por exemplo, o par ordenado (c, a), que é diferente do par ordenado (a, c), também está associado a combinação $\{a, c\}$, que é igual a combinação $\{c, a\}$.

Com esta associação, cada dupla de pares ordenados distintos está associado a uma mesma combinação. Assim, concluimos que existe uma função 2 para 1 do conjunto P dos pares ordenados com coordenadas distintas escolhidas dentre os quatro elementos de A no conjunto C das combinações dos quatro elementos de A, tomados dois a dois.

Daí, pelo Pk1, temos que $\#(C) = \dfrac{\#(P)}{2}$. Mas $\#(C) = C(4, 2)$ e, como vimos acima, $\#(P) = 12$. Então, concluímos que $C(4, 2) = \dfrac{12}{2} = 6$.

2. *Seja* $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *um conjunto. Quantas combinações de* A *com* p *elementos, existem?*

Resolução:

Seja C o conjunto formado por todas as combinações de n elementos de A, tomados p a p. Queremos determinar $\#(C)$.

Pelo Pk1, se encontrarmos um conjunto U, do qual sabemos determinar o número de elementos, e uma função k para 1, adequada, de U para C, o problema está resolvido.

Para isto, observe, que cada combinação é um <u>subconjunto</u> de A, com p elementos (distintos). Por exemplo, $\{a_1, a_2 \ldots, a_{p-1}, a_p\}$ e $\{a_1, a_2 \ldots, a_{p-1}, a_{p+1}\}$ são combinações.

E, que cada combinação corresponde a $p!$ sequências (ordenadas) de p elementos que podem ser formadas com elementos distintos de A. Por exemplo, a combinação $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p\}$ corresponde as sequências $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_p)$, $(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_p)$, $(a_p, a_{p-1}, a_{p-2}, \ldots, a_1)$, entre outras.

Assim, primeiramente, vamos calcular o número de sequências (ordenadas) de p elementos distintos que podem ser formadas com elementos distintos de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.

Para formar uma tal sequência, podemos executar p tarefas:

t_1 : escolher um elemento para ser o primeiro termo da sequência;
t_2 : escolher um elemento, diferente do já escolhido para ser o segundo termo da sequência;
$\vdots$ $\vdots$
t_i : escolher um elemento, diferente dos já escolhidos para ser o i-ésimo termo da sequência;
$\vdots$ $\vdots$
t_p : escolher um elemento, diferente dos já escolhidos para ser o p-ésimo termo da sequência.

A tarefa t_1 pode ser executada de n maneiras; a tarefa t_2 pode ser executada de $n-1$ maneiras; a tarefa t_3 pode ser executada de $n-2$ maneiras; $\ldots$; a tarefa t_i pode ser executada de $n-(i-1)$ maneiras; $\ldots$; a tarefa t_p pode ser executada de $n-(p-1)$ maneiras.

Assim pelo PM, existem $n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-(i-1)) \times \ldots \times (n-(p-1))$ sequências (ordenadas) com termos distintos escolhidos dentre os elementos de $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Ou seja,

$$\#(U) = n \times (n-1) \times (n-2) \times (n-(i-1)) \times \ldots \times (n-(p-1)).$$

Agora, vamos associar cada uma das sequências contadas acima a combinação formada pelos mesmos elementos que são os termos da sequência. Por exemplo, a sequência $(a_2, a_1, a_3, \ldots, a_p)$ está associada a combinação $\{a_2, a_1, a_3, \ldots, a_p\}$.

Mas, como já vimos, sequências formadas pelos mesmos termos (só que em uma ordem diferente) estão associadas a mesma combinação. Por exemplo, todas as sequências $(a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_p)$, $(a_1, a_3, a_2, a_4, \ldots, a_p)$, $(a_2, a_1, a_3, a_4, \ldots, a_p)$, $(a_2, a_3, a_1, a_4, \ldots, a_p)$, que são distintas duas a duas, estão associadas as combinaçãoes $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_p\}$, $\{a_1, a_3, a_2, a_4, \ldots, a_p\}$, $\{a_2, a_1, a_3, a_4, \ldots, a_p\}$, $\{a_2, a_3, a_1, a_4, \ldots, a_p\}$, que são todas iguais, pois possuem os mesmos elementos. Então, na verdade, as sequências acima estão todas associadas a combinação $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_p\}$.

Com esta associação, $p!$ sequências distintas estão associadas a uma mesma combinação. Assim, concluimos que existe uma função $p!$ para 1 do conjunto U das sequências com p termos distintos escolhidos dentre os elementos de A, no conjunto C das combinações dos n elementos de A, tomados p a p.

Daí, pelo Pk1, temos que $\#(C) = \dfrac{\#(U)}{p!}$. Mas $\#(C) = C(n, p)$ e, como vimos anteriormente, $\#(U) = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(p-1))$. Então, concluímos que

$$C(n,p) = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(p-1))}{p \times (p-1) \times (p-2) \times \cdots \times 1}.$$

Por razões estéticas e para simplificar certas aplicações aritméticas, a fórmula acima é, usualmente, escrita como

$$C(n,p) = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Esta transformação pode ser feita do seguinte modo:

$$\begin{aligned}
\#(U) &= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-(p-1)) \\
&= n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) \\
&= n \times \ldots \times (n-p+1) \times \frac{(n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 1} \\
&= \frac{n \times \ldots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \ldots \times 1} \\
&= \frac{n!}{(n-p)!}.
\end{aligned}$$

Assim, $C(n,p) = \dfrac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!} \times \dfrac{1}{p!} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

5.5 Princípio da inclusão-exclusão

Inicialmente, exemplificamos o uso do PIE na resolução de problemas que envolvem 2 conjuntos. Depois, exemplificamos o uso do PIE na resolução de um problema que envolve 3 conjuntos.

O primeiro exemplo, envolvendo 2 conjuntos, ilustra a aplicação do PIE na determinação do número de elementos de uma interseção, sendo que o número de elementos da união pode ser obtido diretamente dos dados do problema. Já o segundo exemplo, envolvendo 3 conjuntos, ilustra a aplicação do PIE na determinação do número de elementos de uma união. Vale ressaltar que em muitos problemas que envolvem 3 ou mais conjuntos, usualmente, pede-se para determinar o número de elementos de uma interseção, como acontece no primeiro exemplo. Nestes casos, o uso do PIE torna-se praticamente indispensável.

---

1. *Uma pesquisa de opinião, realizada num bairro de Natal, entrevistou* 1.000 *pessoas e apresentou o seguinte resultado:* 650 *dos entrevistados frequentavam a praia de Ponta Negra,* 550 *frequentavam a praia do Meio e* 150 *não iam à praia. De acordo com essa pesquisa, o número de entrevistados que frequentavam ambas as praias era de:*

   (a) 200 (b) 350 (c) 400 (d) 250

Resolução:

Considere os seguintes conjuntos:

P : dos entrevistados que frequentavam a praia de Ponta Negra;
M : dos entrevistados que frequentavam a praia do Meio;
N : dos entrevistados que não iam a praia.

Queremos determinar o número de entrevistados que frequentavam ambas as praias de Ponta Negra e do Meio, ou seja, $\#(P \cap M)$. Pelo PIE, temos que $\#(P \cup M) = \#(P) + \#(M) - \#(P \cap M)$, ou seja,

$$\#(P \cap M) = \#(P) + \#(M) - \#(P \cup M).$$

Daí, se calculamos $\#(P \cup M)$, $\#(P)$ e $\#(M)$, o problema está resolvido.

Cálculo de $\#(P)$: De acordo com o enunciado, $\#(P) = 650$.

Cálculo de $\#(M)$: De acordo com o enunciado, $\#(P) = 550$.

Cálculo de $\#(P \cup M)$: De acordo com o enunciado, $\#(P \cup M)$ pode ser obtido calculando-se o número total de entrevistados e subtraindo dele o número de entrevistados que não iam a praia. Assim, $\#(P \cup M) = 1.000 - 150 = 850$.

Daí, $\#(P \cap M) = \#(P) + \#(M) - \#(P \cup M) = 650 + 550 - 850 = 350$. Ou seja, 350 pessoas frequentavam ambas as praias.

---

2. *Considere o conjunto* $\{1, 2, 3, \ldots, 1732\}$. *Quantos números desse conjunto são múltiplos de* 4 *ou de* 6 *ou de* 10*?*

Resolução:

Considere os seguintes conjuntos de múltiplos em questão:

$$\begin{array}{rcl} Q & : & \text{dos múltiplos de 4;} \\ S & : & \text{dos múltiplos de 6;} \\ D & : & \text{dos múltiplos de 10.} \end{array}$$

Queremos determinar o número de múltiplos 4 ou de 6 ou de 10, ou seja, $\#(Q \cup S \cup D)$. Pelo PIE, facilmente se observa que $\#(Q \cup S \cup D) = \#(Q) + \#(S) + \#(D) - \#(Q \cap S) - \#(Q \cap D) - \#(S \cap D) + \#(Q \cap S \cap D)$. Daí, se calculamos $\#(Q)$, $\#(S)$, $\#(D)$, $\#(Q \cap S)$, $\#(Q \cap D)$, $\#(S \cap D)$ e $\#(Q \cap S \cap D)$, o problema está resolvido.

Cálculo de $\#(Q)$: Para calcular o número de múltiplos de 4 do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1732\}$, basta calcular o quociente da divisão de 1732 por 4, ou seja $\#(Q) = 433$.

Cálculo de $\#(S)$: Para calcular o número de múltiplos de 6 do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1732\}$, basta calcular o quociente da divisão de 1732 por 6, ou seja $\#(S) = 288$.

Cálculo de $\#(D)$: Para calcular o número de múltiplos de 10 do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1732\}$, basta calcular o quociente da divisão de 1732 por 10, ou seja $\#(D) = 173$.

Cálculo de $\#(Q \cap S)$: Para calcular o número de múltiplos de 4 e de 6 do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1732\}$, devemos observar que um número é múltiplo de 4 e de 6 se é múltiplo do $MMC(4, 6)$, que é 12. Daí, basta calcular o quociente da divisão de 1732 por 12, ou seja $\#(Q \cap S) = 144$.

Cálculo de $\#(Q \cap D)$: Para calcular o número de múltiplos de 4 e de 10 do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1732\}$, devemos observar que um número é múltiplo de 4 e de 10 se é múltiplo do $MMC(4, 10)$, que é 20. Daí, basta calcular o quociente da divisão de 1732 por 20, ou seja $\#(Q \cap D) = 86$.

Cálculo de $\#(S \cap D)$: Para calcular o número de múltiplos de 6 e de 10 do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1732\}$, devemos observar que um número é múltiplo de 6 e de 10 se é múltiplo do $MMC(6, 10)$, que é 30. Daí, basta calcular o quociente da divisão de 1732 por 30, ou seja $\#(S \cap D) = 57$.

Cálculo de $\#(Q \cap S \cap D)$: Para calcular o número de múltiplos de 4, de 6 e de 10 do conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1732\}$, devemos observar que um número é múltiplo de 4, de 6 e de 10 se é múltiplo do $MMC(4, 6, 10)$, que é 60. Daí, basta calcular o quociente da divisão de 1732 por 60, ou seja$\#(Q \cap S \cap D) = 28$.

Portanto, $\#(Q \cup S \cup D) = \#(Q) + \#(S) + \#(D) - \#(Q \cap S) - \#(Q \cap D) - \#(S \cap D) + \#(Q \cap S \cap D) = 433 + 288 + 173 - 144 - 86 - 57 + 28 = 635$. Ou seja, 635 números que estão no conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, 1732\}$ são múltiplos de 4 ou de 6 ou de 10.

Capítulo 6

Relações lógicas entre os princípios

Neste capítulo, apresentamos os enunciados formais dos princípios de contagem tratados nos Capítulos 4 e 5, e estudamos as relações lógicas entre eles. Isto é, enunciamos formalmente cada princípio e verificamos quais princípios são consequências dos outros. Nosso objetivo é estabelecer uma hierarquia lógica dos princípios, de acordo com os seus poderes de prova, em oposição a hierarquia didática, esboçada nos capítulo anteriores.

Na Seção 6.1, enunciamos os princípios de maneira formal, fazendo uso dos conceitos de bijeção, de função k para 1, de união, de interseção e de produto cartesiano. Na Seção 6.2, provamos alguns resultados básicos da álgebra dos conjuntos, que serão usados na seção posterior. Finalmente, na Seção 6.3 apresentamos as provas das inter-relações lógicas entre os princípios.

6.1 Enunciado matemático dos princípios de contagem

Os princípios de contagem mais simples podem ser enunciados formalmente do seguinte modo:

> **Princípio da Bijeção (PB):** Sejam A e B conjuntos finitos. Se $f : A \leftrightarrow B$ é uma bijeção, então $\#(A) = \#(B)$.

Princípio k para 1 (Pk1): Sejam A e B conjuntos finitos. Se $f : A \to B$ é uma função k para 1, então $\#(A) = k \cdot \#(B)$.

Princípio da Adição para 2 conjuntos (PA): Sejam A e B conjuntos finitos. Se $A \cap B = \emptyset$, então $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

Princípio da Inclusão-Exclusão para 2 conjuntos (PIE): Sejam A e B conjuntos finitos. Então, $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Princípio Multiplicativo para 2 conjuntos (PM): Sejam A e B conjuntos finitos. Então, $\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$.

Além destes, temos também os enunciados formais do PA, do PIE e do PM generalizados.

Princípio da Adição para n conjuntos (PAn): Sejam A_1, $A_2, \ldots, A_n$, conjuntos finitos. Se $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todos i, j, com $1 \leq i \neq j \leq n$, então $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_1) + \#(A_2) + \ldots + \#(A_n)$.

Princípio da Inclusão-Exclusão para n conjuntos (PIEn): Sejam A_1, $A_2, \ldots, A_n$, conjuntos finitos. Então,

$$\begin{aligned}\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \quad = \quad & \textstyle\sum_{1 \leq i \leq n} \#(A_i) - \\ & \textstyle\sum_{1 \leq i < j \leq n} \#(A_i \cap A_j) + \\ & \textstyle\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \#(A_i \cap A_j \cap A_k) - \\ & \ldots + \\ & (-1)^{n+1} \, \#(A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n).\end{aligned}$$

Princípio Multiplicativo para n conjuntos (PMn): Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos. Então, $\#\left(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n\right) = \#(A_1) \cdot \#(A_2) \cdot \ldots \cdot \#(A_n)$.

6.2 Resultados básicos

Nesta seção, provamos alguns resultados básicos da Teoria de Conjuntos que serão usados na Seção 6.3. Em tudo o que segue, A, B e C são conjuntos quaisquer, a menos que se diga algo em contrário. Um dos resultados que provamos, corresponde a um caso particular de um dos princípios básicos de contagem.

Lema 1 *$A \subseteq A \cup B$.*

Prova. Suponha, para uma contradição, que $A \nsubseteq A \cup B$. Daí, existe $x \in A$ tal que $x \notin A \cup B$. Como $x \notin A \cup B$, temos que $x \notin A$ e $x \notin B$. Agora, com $x \in A$ e $x \notin A$, temos uma contradição. Daí, $A \subseteq A \cup B$. ■

Lema 2 *$B \subseteq A \cup B$.*

Prova. Inteiramente similar a prova anterior. ■

Lema 3 *$A \cap B = B \cap A$.*

Prova. A prova consiste em uma série de equivalências.

Dado x arbitrário, temos que $x \in A \cap B$ sse $x \in A$ e $x \in B$ sse $x \in B$ e $x \in A$ sse $x \in B \cap A$. Isso nos leva a concluir que $A \cap B = B \cap A$. ■

Lema 4 *$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.*

Prova. ($\Rightarrow$) Primeiramente, vamos provar que $A \cup B \subseteq (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

Seja $x \in (A \cup B)$. Temos, então, que $x \in A$ ou $x \in B$. Vamos examinar dois casos.

Se $x \in A$, temos dois subcasos. No primeiro, se $x \in B$, então $x \in A \cap B$ e daí, $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. No segundo, se $x \notin B$, então $x \in A \setminus B$ e daí, $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

Se $x \notin A$, como $x \in A \cup B$, temos que $x \in B$. Assim, $x \in B \setminus A$ e daí, $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

Isso nos leva a concluir que $(A \cup B) \subseteq ((A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A))$.

($\Leftarrow$) Vamos agora provar que $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B$.

Seja $x \in (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Então $x \in A \setminus B$ ou $x \in A \cap B$ ou $x \in B \setminus A$. Vamos examinar cada um destes casos.

Se $x \in A \setminus B$, temos que $x \in A$ e $x \notin B$. Assim, $x \in A \cup B$.

Se $x \in A \cap B$, temos que $x \in A$ e $x \in B$. Assim, $x \in A \cup B$.

Se $x \in B \setminus A$, temos que $x \in B$ e $x \notin A$. Assim, $x \in A \cup B$.

Isso nos leva a concluir que $(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B$.

Finalmente, de ($\Rightarrow$) e ($\Leftarrow$), temos que $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. ■

Lema 5 $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Prova. Suponha, para uma contradição, que $(A \setminus B) \cap (A \cap B) \neq \emptyset$. Daí, existe $x \in (A \setminus B) \cap (A \cap B)$. Ou seja, $x \in A \setminus B$ e $x \in A \cap B$. Ou, ainda, $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \in A$ e $x \in B$.

Agora, com $x \in B$ e $x \notin B$, temos uma contradição. Daí, $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$. ■

Lema 6 $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$.

Prova. Pelo Lema anterior, temos que $(B \setminus A) \cap (B \cap A) = \emptyset$. Como $B \cap A = A \cap B$, temos, então, que $(B \setminus A) \cap (A \cap B) = \emptyset$. ■

Lema 7 $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$.

Prova. Suponha, para uma contradição, que $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) \neq \emptyset$. Daí, existe $x \in (A \setminus B) \cap (B \setminus A)$. Ou seja, $x \in (A \setminus B)$ e $x \in (B \setminus A)$. Ou, ainda, $x \in A$, $x \notin B$, $x \in B$ e $x \notin A$.

Com $x \in A$ e $x \notin A$, temos temos uma contradição. Daí, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. ■

Lema 8 $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$.

Prova. ($\Rightarrow$) Primeiramente, vamos provar que $A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B)$.

Seja $x \in A \setminus B$. Daí $x \in A$ e $x \notin B$.

Como $x \notin B$, temos que $x \notin A \cap B$.

Assim, $x \in A$ e $x \notin A \cap B$, ou seja, $x \in A \setminus (A \cap B)$.

Isto nos leva a concluir que $A \setminus B \subseteq A \setminus (A \cap B)$.

($\Leftarrow$) Vamos agora provar que $A \setminus (A \cap B) \subseteq A \setminus B$.

Seja $x \in A \setminus (A \cap B)$. Daí, $x \in A$ e $x \notin A \cap B$.

Como $x \notin A \cap B$, temos que $x \notin A$ ou $x \notin B$. Como, da hipótese, $x \in A$, destas duas alternativas a única verdadeira é $x \notin B$,

Assim, temos $x \in A$ e $x \notin B$, ou seja $x \in A \setminus B$.

Isto nos leva a conlcuir que $A \setminus (A \cap B) \subset A \setminus B$.

Finalmente, de ($\Rightarrow$) e ($\Leftarrow$), temos que $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. ■

Lema 9 $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$.

Prova. Pelo Lema 8, temos que $B \setminus A = B \setminus (B \cap A)$. Daí, pelo Lema 3, temos $B \setminus A = B \setminus (A \cap B)$. ■

Lema 10 *Se* $A \subseteq B$, *então* $B = (B \setminus A) \cup A$.

Prova. Suponha que $A \subseteq B$.

($\Rightarrow$) Primeiramente, vamos provar que $B \subseteq (B \setminus A) \cup A$.

Seja $x \in B$. Vamos considerar dois casos: $x \in A$ ou $x \notin A$.

Se $x \in A$, então $x \in (B \setminus A) \cup A$.

Se $x \notin A$, então como $x \in B$, temos que $x \in (B \setminus A)$. Daí $x \in (B \setminus A) \cup A$.

Isto nos leva a concluir que $B \subseteq (B \setminus A) \cup A$.

($\Leftarrow$) Vamos agora provar que $(B \setminus A) \cup A \subseteq B$.

Seja $x \in (B \setminus A) \cup A$. Daí, temos que $x \in (B \setminus A)$ ou $x \in A$. Vamos examinar cada um destes casos.

Se $x \in (B \setminus A)$, então $x \in B$ e $x \notin A$. Logo, $x \in B$.

Se $x \in A$, como por hipótese $A \subseteq B$, temos que $x \in B$.

Isto nos leva a conluir que $(B \setminus A) \cup A \subseteq B$.

Finalmente, de $(\Rightarrow)$ e $(\Leftarrow)$, temos que $B = (B \setminus A) \cup A$. ∎

Lema 11 $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$.

PROVA. Suponha, para uma contradição, que $x \in (B \setminus A) \cap A$. Daí, $x \in B \setminus A$ e $x \in A$.

Como $x \in B \setminus A$, temos que $x \notin A$.

Com $x \in A$ e $x \notin A$ temos uma contradição. Daí, $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$. ∎

Lema 12 *Sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos, tais que $A_1 \cap A_i = \emptyset$, para todo i, com $2 \leq i \leq n$. Então, $A_1 \cap (A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \emptyset$.*

PROVA. Suponha que $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos tais que $A_1 \cap A_j = \emptyset$, para todo i, j, com $2 \leq i \neq j \leq n$.

Suponha, para uma contradição, que $A_1 \cap (A_2 \cup \ldots \cup A_n) \neq \emptyset$. Daí, existe $x \in A_1 \cap (A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ e, consequentemente, temos $x \in A_1$ e $x \in A_2 \cup \ldots \cup A_n$.

Como $x \in A_2 \cup \ldots \cup A_n$, existe i, com $2 \leq i \leq n$, tal que $x \in A_i$. Assim, $x \in A_1$ e $x \in A_i$, de onde temos $x \in A_1 \cap A_i$, ou seja, $A_1 \cap A_i \neq \emptyset$, uma contradição.

Daí, $A_1 \cap (A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \emptyset$. ∎

Os lemas provados até o momento dizem respeito aos resultados das operações conjuntistas aplicadas sobre os conjuntos envolvidos. O lema que provaremos a seguir diz respeito também a cardinalidade dos conjuntos envolvidos e é o caso particular do PA2 em que $A \subseteq B$.

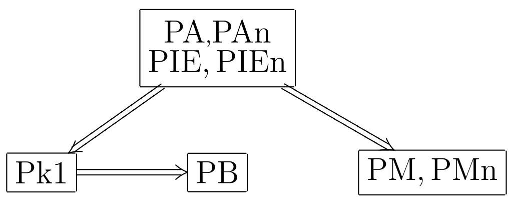
Lema 13 (Assumindo o PA) *Se A e B são finitos e $A \subseteq B$, então* $\#(B \setminus A) = \#B - \#A$.

PROVA. Suponha que A e B são conjuntos finitos e que $A \subseteq B$. Assim, pelo Lema 10, $B = (B \setminus A) \cup A$. Mas, pelo Lema 11, $(B \setminus A) \cap A = \emptyset$ e, assim, $B \setminus A$ e A formam uma partição de B. Então, pelo PA, $\#B = \#(B \setminus A) + \#A$. Daí, $\#(B \setminus A) = \#B - \#A$. ■

6.3 Relações lógicas entre os princípios

Nesta seção, vamos mostrar as seguintes implicações ($\Rightarrow$) e equivalências ($\Leftrightarrow$) entre os princípios de contagem: PIE $\Leftrightarrow$ PIEn; PA $\Leftrightarrow$ PAn; PM $\Leftrightarrow$ PMn; PIE $\Leftrightarrow$ PA; PA $\Rightarrow$ Pk1; Pk1 $\Rightarrow$ PB; PA $\Rightarrow$ PM.

Estas relações estão sumarizadas na figura abaixo, onde princípios equivalentes estão dentro de um mesmo retângulo e uma seta dupla apontando de um retângulo para outro significa que os princípios que estão no retângulo da ponta são consequência dos que estão no retângulo da outra extremidade.



Em nosso ponto de vista, qualquer didática que tenha por objetivo ensinar o uso dos princípios de contagem deve levar em consideração os aspectos intuitivos dos princípios. Por isso, deve procupar-se em explicar os princípios partindo dos mais simples (ou considerados mais intuitivos) para posteriormente tratar do mais complicados (considerados menos intuitivos). Por exemplo, quando uma criança está aprendendo a contar objetos de um conjunto, ela associa um número natural não nulo e em ordem crescente a cada um dos objetos. O número que ela associa ao último objeto é o número de elementos do conjunto que está contando. Quando ela utiliza esse processo de associação de números naturais não nulos e em ordem crescente a objetos de um conjunto que ela quer contar, ela está construindo uma bijeção entre o conjunto dos objetos e um subconjunto particular dos números naturais. Daí, parece que o Princípio da Bijeção entre dois conjuntos é tão fundamental que pode ser o primeiro princípio da nossa lista a ser apresentado a um estudante.

Como veremos adiante, em oposição a sua simplicidade didática, o PB não parece ser (e, de fato, não é) o princípio mais fundamental do ponto de vista lógico. Assim, as relações lógicas que estabelecemos nas próximas seções não devem ser confundidas com os aspectos didáticos dos princípios.

6.3.1 Relações entre os princípios e os princípios generalizados correspondentes

Nesta seção, mostramos que cada princípio generalizado é equivalente a sua forma mais simples.

Teorema 1 PIE *se, e somente se* PIEn.

Primeiramente, observe que se $n = 2$, então o PIE e PIE2 são idênticos. Assim, vamos fazer a prova para $n = 3$, assumindo o caso $n = 2$. Depois vamos fazer a prova para $n = 4$, assumindo os casos em que $n = 2$ e $n = 3$. A prova por indução em n pode ser obtida facilmente a partir dos casos particulares feitos aqui, mas resolvemos omití-la pois a utilização de índices genéricos na sua redação dificultaria a leitura e não contribuiria para o entendimento.

Teorema 2 PIE2 *se, e somente se,* PIE3.

Prova. Suponha que o PIE2 seja verdadeiro.

Sejam A_1, A_2, A_3 conjuntos finitos.

Então, pelo PIE2, $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#((A_1 \cup A_2) \cup A_3) = \#(A_1 \cup A_2) + \#A_3 - \#\left[(A_1 \cup A_2) \cap A_3\right]$.

Pelo PIE2, também temos $\#(A_1 \cup A_2) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cap A_2)$.

Além disso, como $(A_1 \cup A_2) \cap A_3 = (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)$, também pelo PI2, temos $\#((A_1 \cup A_2) \cap A_3) = \#[(A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)] = \#(A_1 \cup A_3) + \#(A_2 \cup A_3) - \#[(A_1 \cap A_3) \cap (A_2 \cap A_3)]$.

Logo, substituindo, temos $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 - \#(A_1 \cup A_2) + \#A_3 - [\#(A_1 \cap A_3) + \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)]$.

Ou seja, $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

($\Leftarrow$) Sejam A, B conjuntos finitos. Então, tomando $A_1 = A$, $A_2 = B$ e $A_3 = B$, pelo PIE3, temos $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \#A + \#B + \#B - \#(A \cap B) - \#(A \cap B) - \#(B \cap B) + \#(A \cap B \cap B) = \#A + \#B + \#B + -\#(A \cap B) - \#(A \cap B) - \#B + \#(A \cap B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$.

De ($\Rightarrow$) e ($\Leftarrow$), podemos concluir que PIE se, e somente se PIE3. ■

Teorema 3 PIE3 *se, e somente se,* PIE4.

Prova. ($\Rightarrow$) Suponha que o PIE3 seja verdadeiro.

Sejam A_1, A_2, A_3, A_4 conjuntos finitos.

Então, Pelo PIE2, que é equivalente ao PIE3, temos $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \#((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cup A_4) = \#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) + \#A_4 - \#[(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4]$.

Mas, pelo PIE3 $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Além disso, como $(A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4 = (A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)$, novamente pelo PIE3, temos $\#((A_1 \cup A_2 \cup A_3) \cap A_4) = \#[(A_1 \cap A_4) \cup (A_2 \cap A_4) \cup (A_3 \cap A_4)] = \#(A_1 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_4) + \#(A_3 \cap A_4) - \#((A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4)] - \#((A_1 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)] - \#((A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)] + \#[(A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)]$.

Logo, substituindo, temos $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#A_4 - [\#(A_1 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_4) + \#(A_3 \cap A_4) - \#((A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4)] - \#((A_1 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)] - \#((A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)] + \#[(A_1 \cap A_4) \cap (A_2 \cap A_4) \cap (A_3 \cap A_4)]]$.

Ou seja, $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_4) - \#(A_2 \cap A_4) - \#(A_3 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$.

($\Leftarrow$) Sejam A, B, C conjuntos finitos. Então, tomando $A_1 = A$, $A_2 = B$, $A_3 = C$ e $A_4 = C$, pelo PIE4, temos $\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = \#A_1 + \#A_2 + \#A_3 + \#A_4 - \#(A_1 \cap A_2) - \#(A_1 \cap A_3) - \#(A_2 \cap A_3) - \#(A_1 \cap A_4) - \#(A_2 \cap A_4) - \#(A_3 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + \#(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + \#(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + \#(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - \#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \#A + \#B + \#C + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) - \#(C \cap C) + \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap C \cap C) + \#(B \cap C \cap C) - \#(A \cap B \cap C \cap C) = \#A + \#B + \#C + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) - \#(A \cap C) - \#(B \cap C) - \#C + \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap B \cap C) + \#(A \cap C) + \#(B \cap C) - \#(A \cap B \cap C = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(A \cap C)\#(B \cap C) + \#(A \cap B \cap C)$.

De ($\Rightarrow$) e ($\Leftarrow$), temos que PIE3 se, e somente se PIE4. ■

Procedendo de maneira análoga, chegamos a PIEn $\Leftrightarrow$ PIE(n+1), que por indução em n fornece PIE $\Leftrightarrow$ PIEn.

Teorema 4 PA *se, e somente se* PAn.

PROVA. ($\Rightarrow$) Primeiramente, vamos provar que se o PA é verdadeiro, então o PAn também é.

Suponha que o PA é verdadeiro, ou seja, suponha que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

Queremos provar o PAn, ou seja que se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todos i, j, com $1 \leq i \neq j \leq n$, então $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_1) + \#(A_2) + \ldots + \#(A_n)$.

De fato, sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos, tais que tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todos i, j, com $1 \leq i \neq j \leq n$. Como $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_1 \cup (A_2 \cup \ldots \cup A_n))$ e, como, pelo Lema 12, A_1 e $A_2 \cup \ldots \cup A_n$ são disjuntos, temos que A_1 e $A_2 \cup \ldots \cup A_n$ são uma partição de $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$. Assim, pelo PA, $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_1) + \#(A_2 \cup \ldots \cup A_n)$.

Agora, como $\#(A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_2 \cup (A_3 \cup \ldots \cup A_n))$ e, como, pelo Lema 12, A_2 e $A_3 \cup \ldots \cup A_n$ são disjuntos, temos que A_2 e $A_3 \cup \ldots \cup A_n$ são uma partição de $A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$. Assim, pelo PA, $\#(A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_2) + \#(A_3 \cup \ldots \cup A_n)$.

Substituindo esta última igualdade na igualdade obtida acima, temos que $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_1) + \#(A_2) + \#(A_3 \cup \ldots \cup A_n)$.

Agora, aplicando esse raciocínio sucessivamente, concluímos que $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_1) + \#(A_2) + \ldots + \#(A_n)$.

($\Leftarrow$) Suponha que o PAn é verdadeiro. Ou seja, suponha que se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, tais que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todos i, j, com $1 \leq i \neq j \leq n$, então $\#(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \#(A_1) + \#(A_2) + \ldots + \#(A_n)$.

Sejam A e B conjuntos finitos e disjuntos. Então, tomando $A_1 = A$ e $A_2 = B$, pelo PA2, temos $\#(A \cup B) = \#(A_1 \cup A_2) = \#(A_1) + \#(A_2) = \#(A) + \#(B)$.

De ($\Rightarrow$) e ($\Leftarrow$), temos que PA se, e somente se PAn. ■

Teorema 5 PM *se, e somente se* PMn.

Prova. ($\Rightarrow$) Suponha que o PM é verdadeiro, ou seja, suponha que se A e B são conjuntos finitos, então $\#(A \times B) = \#(A) \cdot \#(B)$.

Queremos provar o PMn, ou seja que se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então $\#\left(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n\right) = \#(A_1) \cdot \#(A_2) \cdot \ldots \cdot \#(A_n)$.

De fato, sejam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos finitos.

Da definição de produto cartesiano para mais de dois conjuntos, temos que $\#(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \#(A_1 \times (A_2 \times \ldots \times A_n))$, pelo PM, temos $\#(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \#(A_1) \cdot \#(A_2 \times \ldots \times A_n)$.

Agora, como $A_2 \times \ldots \times A_n = A_2 \times (A_3 \times \ldots \times A_n)$, pelo PM, $\#(A_2 \times \ldots \times A_n) = \#(A_2) \cdot \#(A_3 \times A_4 \times \ldots \times A_n)$.

Substituindo esta última igualdade na igualdade obtida acima, temos que $\#(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \#(A_1) \cdot \#(A_2) \cdot \#(A_3 \times A_4 \times \ldots \times A_n)$.

Por aplicação sucessiva deste raciocínio, temos $\#\,(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \#(A_1) \cdot \#(A_2) \cdot \ldots \cdot \#(A_n)$.

($\Leftarrow$) Suponha que o PMn é verdadeiro, ou seja, que se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são conjuntos finitos, então $\#\,(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n) = \#(A_1) \cdot \#(A_2) \cdot \ldots \cdot \#(A_n)$.

Sejam A e B conjuntos finitos e disjuntos. Então, tomando $A_1 = A$ e $A_2 = B$, pelo PM2, temos $\#(A \times B) = \#(A_1 \times A_2) = \#(A_1).\#(A_2) = \#(A).\#(B)$.

De ($\Rightarrow$) e ($\Leftarrow$), concluimos que PM se, e somente se PMn. ■

Vimos, então que as versões generalizadas dos princípios de contagem não são mais fortes, logicamente falando, do que as suas formas mais simples.

6.3.2 Relações entre os princípios em suas formas simples

Nesta seção, mostramos que, do ponto de vista lógico, o PIE e o PA são equivalentes e que o PA implica tanto o PB quanto o PM.

Teorema 6 PIE *se, e somente se* PA.

PROVA. ($\Rightarrow$) Suponha que o PIE é verdadeiro, ou seja, que se A e B são conjuntos finitos, então $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Queremos provar o PA, ou seja, que se A e B são conjuntos finitos e disjuntos, então $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

Sejam A e B conjuntos finitos e disjuntos.

Como $A \cap B = \emptyset$, temos que $\#(A \cap B) = 0$. Daí, pelo PIE, $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - 0 = \#(A) + \#(B)$.

($\Leftarrow$) Suponha que o PA é verdadeiro, ou seja, que se A e B são conjuntos finitos disjuntos, então então $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

Queremos provar o PIE, ou seja, que se A e B são conjuntos finitos quaiquer, então $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$.

Sejam A e B conjuntos finitos quaisquer.

Pelo Lema 4, temos que $(A \cup B) = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$. Logo, $\#(A \cup B) = \#\left[(A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)\right]$.

Mas, pelos Lemas 5, 6 e 7, temos que $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$, $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$ e $(A \cap B) \cap (B \setminus A) = \emptyset$. E, assim, os conjuntos $A \setminus B$, $A \cap B$ e $B \setminus A$ formam uma partição de $A \cup B$.

Logo, pelo PA3, que é equivalente ao PA, obtemos $\#(A \cup B) = \#(A \setminus B) + \#(A \cap B) + \#(B \setminus A)$.

Daí, pelos Lemas 8 e 9, $\#(A \cup B) = \#(A \setminus (A \cap B)) + \#(A \cap B) + \#(B \setminus (A \cap B))$. Assim, pelo Lema 13, $\#(A \cup B) = [\#(A) - \#(A \cap B)] + \#(A \cap B) + [\#(B) - \#(A \cap B)] = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B)$. ■

Teorema 7 *Se* PA*, então* Pk1*.*

PROVA. Suponha que o PA é verdadeiro, ou seja, que para quaisquer conjuntos finitos A e B, se $A \cap B = \emptyset$, então $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

Para provar o Pk1, sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ conjuntos finitos quaisquer e $f : A \to B$ uma função k para 1 de A em B. Considere os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} B_1 & = & \{a \in A : f(a) = b_1\}; \\ \vdots & & \\ B_i & = & \{a \in A : f(a) = b_i\}; \\ \vdots & & \\ B_n & = & \{a \in A : f(a) = b_n\}. \end{array}$$

Então, pelo PAn, que é equivalente ao PA, temos que $\#(A) = \#(B_1 \cup \ldots \cup B_n) = \#(B_1) + \cdots + \#(B_n)$. Além disso, como f é k para 1, temos também que $\#(B_i) = k$, $1 \leq i \leq n$. Assim, $\#(A) = \underbrace{k + \cdots + k}_{n \text{ vezes}} = k \cdot n$. Logo, $n = \dfrac{\#(A)}{k}$, ou seja, $\#(B) = \dfrac{\#(A)}{k}$. ■

Teorema 8 *Se* Pk1*, então* PB*.*

PROVA. Suponha que o Pk1 é verdadeiro, ou seja, que para quaisquer conjuntos finitos A e B, se existe uma função $f : A \to B$, k para 1, então $\#(B) = \dfrac{\#(A)}{k}$.

Para provar o PB, sejam A e B conjuntos e $f : A \to B$ uma função bijetiva de A em B. Mas isto quer dizer que, cada $a \in A$ corresponde a exatamente um $b \in B$, e vice-versa. Ou seja, que a função f é 1 para 1 de A em B. Logo, pelo P11, temos que $\#(B) = \dfrac{\#(A)}{1}$, ou seja, $\#(A) = \#(B)$. ■

Teorema 9 *Se* PA*, então* PM*.*

PROVA. Suponha que o PA é verdadeiro, ou seja, que para quaisquer conjuntos finitos A e B, se $A \cap B = \emptyset$, então $\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B)$.

Para provar o PM, sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ conjuntos finitos quaiquer. Considere $A \times B$ e os seguintes conjuntos:

$$\begin{array}{rcl} A_1 & = & \{(a_1, b) : b \in B\}; \\ \vdots & & \\ A_i & = & \{(a_i, b) : b \in B\}; \\ \vdots & & \\ A_m & = & \{(a_m, b) : b \in B\}. \end{array}$$

Temos que $A_i \cap A_j = \emptyset$, para todos i e j, tais que $1 \leq i \neq j \leq n$. De fato, se supomos, para uma contradição, que $(x, y) \in A_i \cap A_j$, com $1 \leq i \neq j \leq n$, então $x = a_i$ e $x = a_j$. Assim, $a_i = a_j$, uma contradição.

Temos também que $A_1 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots \cup A_m = A \times B$. De fato, por definição, $A_i \subseteq A \times B$, $1 \leq i \leq n$. Além disso, se $(x, y) \in A \times B$, então existe i, $1 \leq i \leq n$, tal que $x = a_i$. Assim, $(x, y) \in A_i$

Daí, temos que $A_1, \ldots, A_m$ formam uma partição de $A \times B$.

Assim, pelo PAn, que é equivalente ao PA, temos que $\#(A \times B) = \#(A_1) + \ldots + \#(A_m)$. Mas $\#(A_i) = \#(B)$, $1 \leq i \leq m$. Assim, $\#(A \times B) = \underbrace{\#(B) + \ldots + \#(B)}_{m \text{ vezes}} = m \times \#(B) = \#(A)\#(B)$. ■

Capítulo 7

Conclusões

Devido ao fato de atuarmos como professores de análise combinatória no Ensino Básico e de considerarmos que esta é uma disciplina de suma importância para a formação do indivíduo na sociedade, somos motivados a tentar entender — tanto como se encontra quanto como foi formado — o atual estado de coisas no ensino-aprendizagem desta disciplina.

Nosso objetivo é que, a partir deste entendimento, possamos pesquisar métodos e/ou técnicas já existentes, assim como elaborar novas propostas de métodos e/ou técnicas, que contribuam para uma melhoria da maneira como a análise combinatória venha a ser ensinada o que consequentemente, acarretaria numa melhoria do seu aprendizado.

Nesta monografia, tentamos dar um primeiro passo nesta linha de investigação. Para tal, descrevemos e criticamos a didática que é usualmente adotada no ensino de análise combinatória. Um exame preliminar desta didática, embasado pela nossa experiência no ensino desta disciplina, nos leva a crer que a maneira como os conteúdos de análise combinatória são organizados e abordados nos livros didáticos e a maneira como os professores organizam e apresentam estes conteúdos em suas aulas está fortemente embasada na *didática da classificação dos problemas.* Acreditamos, também, que essa metodologia de ensino, baseada na aplicação direta de fórmulas, é adotada pelos professores do Ensino Básico ou como consequência de uma má formação em análise combinatória, ou da maneira equivocada como este conteúdo é usualmente apresentado.

Como um primeiro passo na tentativa de reverter esse quadro, descrevemos, em linhas gerais, uma alternativa para a didática da classificação dos problemas. Essa alternativa, que chamamos de *didática dos princípios de contagem*, foi elaborada pela Profa. Márcia Cerioli do IM-UFRJ e está sendo desenvolvidada por ela e pelo Prof. Petrúcio Viana do IM-UFF. Acreditamos que este método, que utiliza cinco princípios básicos de contagem e prescinde do uso de fórmulas de maneira essencial, permite a quem quer resolver um problema de contagem do tipo abordado no Ensino Básico, fazê-lo de forma segura deixando poucas margens para dúvidas. Por isso, neste trabalho, enunciamos esses cinco princípios básicos — descrevendo-os primeiramente de maneira informal e posteriormente de maneira formal — apresentando vários exemplos de seus usos. Esperamos com isso, que o leitor desta monografia se familiarize com os princípios e se sinta motivado a tentar aplicar a didática baseada nos princípios na resolução de problemas, de maneira segura e correta.

Procuramos também contribuir neste trabalho no estudo das relações lógicas entre os princípios. Esta parte da monografia, que contém as nossas contribuições, é dedicada ao estudo de que princípios são consequência de outros. Provamos assim que, como é esperado, todos os princípios básicos de contagem são consequência do *princípio da adição*, dada a formulação destes princípios na teoria dos conjuntos.

Temos, ainda, a pretensão de que este trabalho seja consultado por professores e alunos e que seu conteúdo contribua para um melhor entendimento dos conteúdos e uma melhor construção dos conhecimentos relacionados a análise combinatória e suas aplicações.

Alguns tópicos nos quais este trabalho pode ser complementado são listados como propostas de trabalhos futuros:

1. O estudo levado a termo nesta monografia é dedicado apenas ao estabelecimento de certas relações lógicas entre os princípios básicos de contagem. Em particular, estudamos apenas a relação dos princípios, mostrando quais princípios são consequência dos outros. Uma extensão natural deste estudo é investigar a independência dos princípios, ou seja, quais princípios não são consequência dos outros.

2. Como tratamos apenas dos cinco princípios básicos de contagem, uma outra extensão natural desta monografia é a de desenvolver um trabalho análogo para princípios de contagem mais avançados, como o método de Polya e as funções geradoras.

3. Neste texto, apresentamos e exemplificamos a didática dos princípios de contagem apenas na resolução de problemas simples. Resta ainda elaborar um repertório mais completo da aplicação desta didática na resolução de problemas mais complexos, principalmente, aqueles que necessitam da aplicação composta de vários princípios.

4. Uma complementação para o estudo apresentado nesta monografia — e que é, na verdade, sua principal motivação— é a de abordar os aspectos didáticos, tanto teóricos quanto práticos, da didática dos princípios de contagem.

Bibliografia

[Almeida e Ferreira, 2008] Almeida, Adriana Luziê de e Ferreira, Ana Cristina. *Aprendendo Análise combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9^o ano do Ensino Fundamental e 2^o ano do Ensino Médio*. Artigo apresentado no EBRAPEM. Rio Claro, 2008.

[Bachx et. al. 1975] *Prelúdio a Análise Combinatória*. 1975.

[Hazzan, 2007] S. Hazzan. *Combinatória, Probabilidade*. Sétima Edição. Fundamentos de Matemática Elementar, volume 5. Atual, 2007.

[Lacaz Netto, 1943] Lacaz Netto, F.A. *Lições de Análise Combinatória*. Editora Clássico Científica S/A, Série A, Coleção E.C.C, número 4, 1943.

[LDB, 1996] Governo Brasileiro. *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional*. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996.

[Morgado et. al., 1991] Morgado, A.C. de O.; de Carvalho, J.B.P.; Carvalho, P.C.P.; Fernandez, P. *Análise Combinatória e Probabilidade*. SBM, Rio de Janeiro, 1991.

[Nogueira, 1972] Nogueira, R. *Lições de Análise Combinatória*, segunda edição. Fundo de Cultura, 1972.

[Esteves, 2001] Esteves, Inês.. *Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescente de 14 anos - 8a série do ensino fun-*

damental., Dissertação de mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2001

[Pacheco e Medeiros, 2006] Pacheco, A.B. ; de Medeiros, C.F. *Uma investigação sobre as dificuldades no uso de estratégias para a resolução de problemas verbais no campo da Análise Combinatória.* Águas de Lindóia, 2006.

[PCNEM, 2006] Secretaria de Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.* Brasília, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

[Sabo, 2010] Sabo, Ricardo Dezso. *Saberes Docentes: A análise combinatória no Ensino Médio.* Monografia de Mestrado em Educação Matemática, São Paulo, Pontifícia Universidade Católica PUC-SP, 2010.

[Lopes, 2006] Lopes, José Marcos. *O ensino de Probabilidade através de jogos e da metodologia de resolução de problemas.* Águas de Lindóia, 2006.