Introdução aos Métodos de Prova

Renata de Freitas e *Petrucio Viana*
IME-UFF, Niterói/RJ

II Colóquio de Matemática da Região Sul
UEL, Londrina/PR
24 a 28 de abril 2012

Sumário

- Provas servem, principalmente, para convencer os outros.

- Enunciados.
- Métodos de prova.
- Método da Suposição.
- Método da Contraposição.
- Método da Redução ao Absurdo.
- Método da Generalização.
- Propriedades das provas.

Enunciados

Um enunciado é uma expressão da linguagem matemática que pode ser classificada como *verdadeira* ou *falsa*, de maneira exclusiva, em um dado contexto.

(a) 2 **é par**.

(b) **O conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados de números naturais possuem a mesma quantidade de elementos.**

(c) **Se** n **é par, então** n^2 **é par**.

Provas e métodos de prova

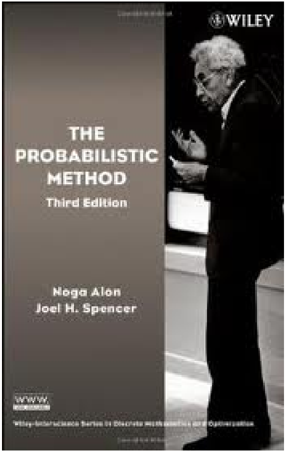
Uma *prova* é uma maneira de certificar (ou justificar ou compreender) a veracidade (ou a falsidade) de um enunciado.

Um *método de prova* é uma maneira de certificar um enunciado, fazendo outra coisa.

Esta outra coisa pode ser — e usualmente é — uma prova de um outro enunciado.

Método probabilístico

Descoberto por T. Szele, em 1943, e desenvolvido e divulgado por P. Erdös e seus colaboradores.



Método probabilístico

Para provar um enunciado da forma

$$\exists x \in U, \text{ tal que } \varphi(x),$$

faça o seguinte:

- Defina uma distribuição de probabilidades adequada no espaço U;
- Prove que a probabilidade de um objeto qualquer $u \in U$ satisfazer $\varphi(x)$ é positiva.
- Conclua que $\quad \exists x \in U, \text{ tal que } \varphi(x) \quad$ foi provada.

Exemplo

O oceano cobre mais que a metade da superfície da Terra.

Proposição **Existem dois pontos antipodais na superfície da Terra que são cobertos pela água.**

Prova pelo método probabilístico:

Seja X um ponto aleatório na superfície da Terra.

Considere os eventos:

$$A : X \text{ é coberto pela água}$$

$$B : \text{O antipodal a } X \text{ é coberto pela água}$$

Temos que $P(A) > \frac{1}{2}$ e $P(B) > \frac{1}{2}$.

Assim, $P(A \cap B) = \underbrace{P(A) + P(B)}_{>1} - \underbrace{P(A \cup B)}_{\leq 1}$ é não negativa.

Em resumo

O método probabilístico nos diz que para provar que

$$\exists x \in U, \text{ tal que } \varphi(x)$$

é verdadeiro, basta provar que

$$P(\{x \in U : \varphi(x)\}) \neq 0.$$

Um método de prova é uma "receita" que diz que, para provar um enunciado, basta provar um outro enunciado, possivelmente *mais simples*.

Métodos de prova

Vamos, agora, discutir alguns dos principais métodos de provas.

Método Direto ou Método da Suposição

Para provar um enunciado da forma

se α, então β

a partir dos enunciados $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, basta:

- Supor α.
- Provar β a partir de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ e α.

Exemplo 1

Proposição **Se n é par, então n^2 é par.**

Prova (pelo método da suposição):

Suponha que n é par.

Daí, $n = 2k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $n^2 = (2k)^2 = 2^2k^2 = 2 \cdot 2 \cdot k^2 = 2(2k^2)$, onde $2k^2 \in \mathbb{N}$.

Logo, n^2 é par. $\blacksquare$

Exemplo 2

Proposição **Se n^2 é par, então n é par.**

Prova (pelo método da suposição):

Suponha que n^2 é par.

Daí, $n^2 = 2k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $2 \mid n^2$.

(Se um número primo divide um produto, ele divide algum dos fatores.)

Daí, $2 \mid n$.

Logo, n^2 é par. $\blacksquare$

Observação

Provas utilizam conhecimento prévio!

Exercícios

Faça provas diretas.

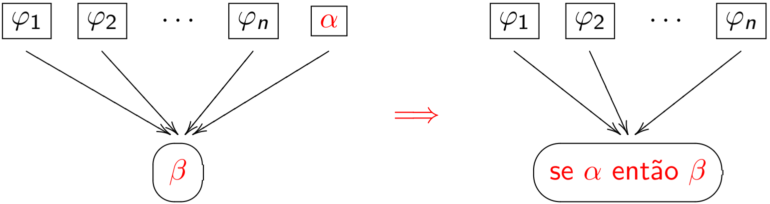
(1) Se n é ímpar, então n^2 é ímpar.

(2) Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.

Em resumo

O Método da Suposição:

- agrega conhecimento prévio e
- troca o enunciado a ser prova por outro mais simples.



Ele é um verdadeiro método de prova!!!

Método da contraposição

Para provar **se** α**, então** β a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$, basta:

- Supor **não** β.
- Provar **não** α a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e **não** β.

Ou seja, para provar **se** α**, então** β, basta
aplicar o método direto em **se não** β**, então não** α.

Exemplo 1

Voltemos ao exercício (2).

Proposição **Se n^2 é ímpar, então n é ímpar.**

Segundo o Método da Contraposição, para provar

se n^2 **é ímpar, então** n **é ímpar**,

basta usar o Método da Suposição para provar

se n **não é ímpar, então** n^2 **não é ímpar**.

Mas este enunciado é equivalente a

se n **é par, então** n^2 **é par**,

que já foi provado.

Exemplo 2

Proposição **Se a é irracional, então $\sqrt{a}$ é irracional.**

Segundo o Método da Contraposição, para provar

se a **é irracional, então** $\sqrt{a}$ **é irracional**,

basta usar o Método da Suposição para provar

se $\sqrt{a}$ **é racional, então** a **é racional**.

Prova (pelo método da contraposição):

Suponha que $\sqrt{a}$ é racional.

Daí, $\sqrt{a} = \dfrac{m}{n}$, onde $m, n \in \mathbb{N}$ e $n \neq 0$.

Daí, $a = (\sqrt{a})^2 = \left(\dfrac{m}{n}\right)^2 = \dfrac{m^2}{n^2}$, onde $m^2, n^2 \in \mathbb{N}$ e $n^2 \neq 0$.

Logo, a é racional. $\blacksquare$

Para usar este método, é preciso saber negar um enunciado.

Exemplo

Proposição Se $x + y = 10$, então $x \neq 3$ e $y \neq 8$.

Prova:

Suponha que $x = 3$ e $y = 8$.

Daí, $x + y = 11$.

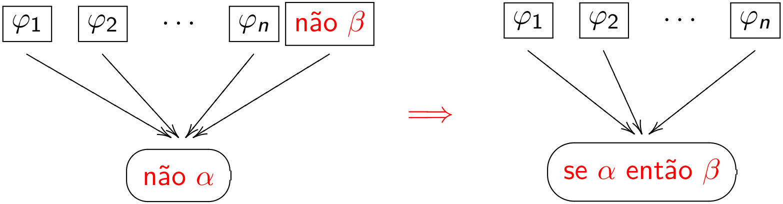
Logo, $x + y \neq 10$. $\blacksquare$

Qual é o erro nesta prova?

Em resumo

O Método da Contraposição:

- agrega conhecimento prévio e
- troca o enunciado a ser provado por outro mais simples.



Método da Redução ao Absurdo

Para provar um enunciado α
a partir dos enunciados $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, basta:

- Supor **não** α.
- Provar uma contradição a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ e **não** α.

Exemplo 1

Proposição **Se n^2 é par, então n é par.**

Prova (pelos métodos da suposição e da redução ao absurdo):

Suponha que n^2 é par.
(para provar que n é par).

Suponha que n não é par
(para provar uma contradição, a partir de n^2 é par).

Daí, n é ímpar, ou seja, $n = 2k + 1$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, ou seja, n^2 é ímpar, uma contradição com n^2 é par.

Logo, n é par. $\blacksquare$

Exemplo 2

Proposição $\sqrt{2}$ **é um número irracional.**

Prova (pelo método da redução ao absurdo):

Suponha que $\sqrt{2}$ é racional.

Daí, $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ e $mdc(a, b) = 1$.

Daí, $2b^2 = a^2$.

Daí, a é par.

Ou seja, $a = 2k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $2b^2 = 2^2k^2 = 2(2k^2)$ e, assim, $b^2 = 2k^2$.

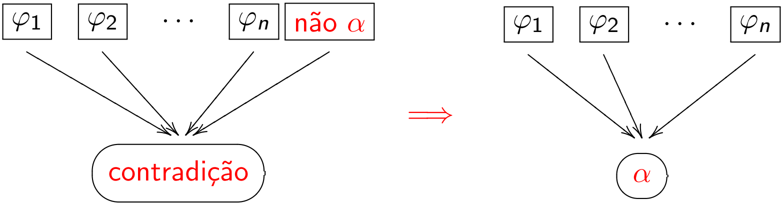
Daí, b é par.

Logo, $mdc(a, b) \geq 2$, uma contradição
com $mdc(a, b) = 1$. $\blacksquare$

Em resumo

O Método da Redução ao Absurdo:

- agrega conhecimento prévio, mas
- não direciona a prova.



É fácil se perder usando este método!!!

Exemplo

Proposição **Existe uma quantidade infinita de números primos.**

Prova (pelo método da redução ao absurdo):

Suponha que existe uma quantidade finita de números primos.

Sejam $p_1, p_2, \ldots, p_n$ todos os números primos.

Considere $m = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n + 1$.

Temos que $p_1 \not| m, \quad p_2 \not| m, \quad \ldots, \quad p_n \not| m$.

Mas, pelo <u>Teorema Fundamental da Aritmética</u>,
m tem um fator primo.

Assim, existe um primo p diferente de $p_1, p_2, \ldots, p_n$, uma contradição. $\blacksquare$

Exercícios

Faça uma prova direta.

Para todo $n \in \mathbb{N}$,
se $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são números primos,
então existe p que é primo e é diferente de $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Método de Generalização

Para provar um enunciado da forma

$$\textbf{para todo } x \in A\textbf{, } \alpha(x)$$

a partir dos enunciados $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, basta:

- Considerar x como um elemento qualquer de A.
- Provar $\alpha(x)$ a partir de $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ usando apenas propriedades de x que x compartilha com todos os elementos de A.

Exemplo

Proposição **Para todo $x \in \mathbb{N}$, se n é par, então n^x é par.**

Já fizemos uma prova para o caso em que $x = 2 \in \mathbb{N}$*:*

Seja $2 \in \mathbb{N}$.

Suponha que n é par.

Daí, $n = 2k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $n^2 = (2k)^2 = 2^2 k^2 = 2(2k^2)$, onde $2k^2 \in \mathbb{N}$.

Logo, n^2 é par. $\blacksquare$

Mas as propriedades do 2 que usamos é compartilhada pelo 2 com todos os números naturais.

Seja $x \in \mathbb{N}$.

Suponha que n é par.

Daí, $n = 2k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $n^x = (2k)^x = 2^x k^x = 2(2^{x-1} k^x)$, onde $2^{x-1} k^x \in \mathbb{N}$.

Logo, n^x é par. $\blacksquare$

Exemplo

Proposição **Se x é primo, então $\sqrt{x}$ é um número irracional.**

Já fizemos uma prova para o caso em que $x = 2 \in \mathbb{N}$*:*

Suponha que $\sqrt{2}$ é racional.

Daí, $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ e $mdc(a, b) = 1$.

Daí, $2b^2 = a^2$.

Daí, $2 \mid a^2$ e, assim, $2 \mid a$.

Ou seja, $a = 2k$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $2b^2 = 2(2k^2)$ e, assim, $b^2 = 2k^2$.

Daí, $2 \mid b^2$ e, assim, $2 \mid b$.

Logo, $mdc(a, b) \geq 2$, uma contradição. $\blacksquare$

Mas as propriedades do 2 que usamos é compartilhada pelo 2 com todos os números primos.

Seja x um número primo.

Suponha que $\sqrt{x}$ é racional.

Daí, $\sqrt{x} = \dfrac{a}{b}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ e $mdc(a, b) = 1$.

Daí, $xb^2 = a^2$.

Daí, $x \mid a^2$ e, assim, $x \mid a$.

Ou seja, $a = xk$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Daí, $xb^2 = x(xk^2)$ e, assim, $b^2 = xk^2$.

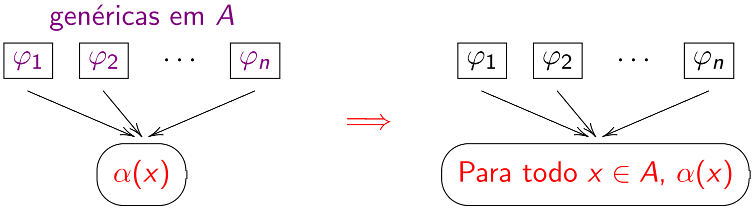
Daí, $x \mid b^2$ e, assim, $x \mid b$.

Logo, $mdc(a, b) \geq x$, uma contradição. $\blacksquare$

Em resumo

O Método de Generalização:

- especifica o tipo de conhecimento prévio que pode ser usado na prova: somente propriedades que são genéricas em A, ou seja, que valem para todos os elementos de A.
- troca o enunciado a ser provado por outro mais simples.



Não é fácil usar este método!!!

Até amanhã!

http://www.uff.br/grupodelogica