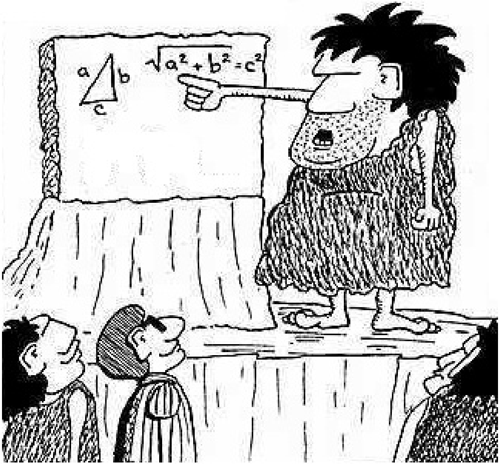
Introdução aos Métodos de Prova

Renata de Freitas e *Petrucio Viana*
IME-UFF, Niterói/RJ

II Colóquio de Matemática da Região Sul
UEL, Londrina/PR
24 a 28 de abril 2012

Bem vindos ao Minicurso de Métodos de Prova!



Necessidade das provas

Prova-se principalmente para

- aprender

- verificar

- se convencer

- atestar, comprovar

- fundamentar

- divulgar

Necessidade das provas

Prova-se principalmente para

$$\left.\begin{array}{l}\text{- aprender}\\ \text{- verificar}\\ \text{- se convencer}\end{array}\right\}\ \text{eu}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{- atestar, comprovar}\\ \text{- fundamentar}\\ \text{- divulgar}\end{array}\right\}\ \text{os outros}$$

Uma prova é um jogo

Tabuleiro

Peças

Jogadores

- EU
- ADVERSÁRIO

Regras do jogo

- Ganho EU se conseguir convencer o ADVERSÁRIO.
- Ganha o ADVERSÁRIO se apresentar razões para não estar convencido.

A prova deve ser correta e convincente para o outro, não para o autor da prova.

Exemplo 1

Proposição

1 centavo = 1 real.

Prova:

$$\begin{aligned}
1 \text{ centavo} &= 0,01 \text{ real} \\
&= (0,1)^2 \text{ real} \\
&= (10 \text{ centavos})^2 \\
&= 100 \text{ centavos} \\
&= 1 \text{ real.} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Exemplo 2

Proposição

Para todos $x, y \in \mathbb{R}$, se $x \neq 3$ e $x^2 y = 9y$, então $y = 0$.

Prova:

Suponha que $x^2 y = 9y$.
Daí, temos que $x^2 y - 9y = 0$.
Ou seja, $(x^2 - 9)y = 0$.
Como $x \neq 3$, temos que $x^2 \neq 9$.
Logo, $y = 0$. $\blacksquare$

Exemplo 3

Proposição

Para todos $a, b \in \mathbb{R}$, temos que $\sqrt{ab} \leq \dfrac{a+b}{2}$.

Prova:

$$
\begin{aligned}
\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \quad & \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{ab} \leq a+b \\
& \Longleftrightarrow \quad 2\sqrt{ab} \leq a+b \\
& \Longleftrightarrow \quad 4ab \leq (a+b)^2 \\
& \Longleftrightarrow \quad 4ab \leq a^2 + 2ab + b^2 \\
& \Longleftrightarrow \quad 0 \leq a^2 - 2ab + b^2 \\
& \Longleftrightarrow \quad 0 \leq (a-b)^2. \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Começando pelas perguntas

- O que é uma prova?
- Por que se prova?
- É fácil reconhecer uma prova?
- É fácil fazer uma prova?
- Há algo que não se prova?
- Como fazer uma prova?

Provas justificam verdades

Provas são um meio de justificar a veracidade ou a falsidade de enunciados.

Quaisquer dois triângulos que tenham dois lados correspondentes iguais e os ângulos compreendidos por estes lados também iguais, têm bases iguais.

Todos os enunciados, verdadeiros, sobre pontos e linhas no plano podem ser demonstrados a partir dos axiomas de incidência, ordem, congruência, das paralelas e de Arquimedes, propostos por David Hilbert (1899).

Dada a equivalência:

$$\varphi \text{ é falsa} \iff \text{a negação de } \varphi \text{ é verdadeira},$$

sempre que falamos em prova,
estamos falando em justificar a verdade.

Métodos para justificar a verdade

Existem muitos meios para se justificar a verdade.

- Tribunal do juri: um grupo de pessoas decide que o enunciado está correto.
- Argumento da autoridade: uma pessoa, que tem autoridade, garante que o enunciado está correto.
- Amostragem: uma análise de uma pequena parcela de evidências mostra que o enunciado está correto.
- Iluminação divina: um sinal divino indica que o enunciado está correto.

Métodos para justificar a verdade

- Palavra do chefe: uma pessoa, da qual não podemos duvidar, estipula que o enunciado está correto.
- Convicção: não há nenhuma dúvida de que o enunciado está correto.
- Uso do computador: usamos um programa que mostra que o enunciado está correto.
- Transferência de responsabilidade: deixamos a tarefa de justificar que o enunciado está correto.
- Força bruta: faz-se uso de persuação física.

Princípio da Razão Suficiente

Em nosso dia-a-dia, todos estes “métodos” são aceitos.
Em ciência, somos um pouco mais exigentes.

Princípio da Razão Suficiente:
Em ciência, todo enunciado deve ser justificado de maneira adequada.

Fato científico
=
enunciado + justificativa adequada

O que é justificativa adequada?

Justificativas nas ciências empíricas

Ciências	$=$	Empíricas	$\cup$	Formais
		Física		Matemática

Justificativas nas ciências empíricas
são
argumentações apoiadas em
observações e experiências.

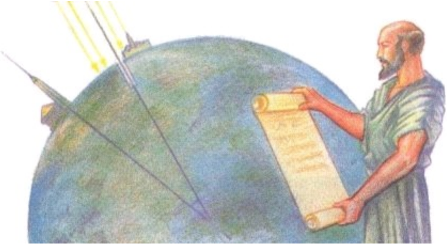
Caso observações e experiências não sejam viáveis, as justificativas devem conter *indicações acerca da possibilidade de* comprovação mediante observações e experiências.

A terra não é plana

Proposição **A Terra não é plana**.

A terra não é plana

Justificativa (Eratóstenes de Cirene, II a.C.):



Na cidade de Siene existe um poço cujas águas, a cada 21 de junho, ao meio-dia, refletem o Sol, quando este se encontra no ponto mais alto do céu.

Em Alexandria, situada a 800km de Siene, no mesmo dia e na mesma hora, existe um obelisco que projeta uma sombra bastante pronunciada.

A terra não é plana

O Sol está tão distante no espaço que seus raios, ao chegarem à superfície da Terra, são praticamente paralelos.

Assim, se a Terra fosse plana, no mesmo instante em que as águas do poço em Siene refletem o Sol, o obelisco em Alexandria são poderia projetar uma sombra tão pronunciada.

Logo, a Terra não é plana.

Justificativas baseadas em experiências

Para ser adequada, a argumentação de Eratóstenes deve ser baseada em experiências que comprovem todos os fatos utilizados como apoio.

Os raios do Sol são praticamente paralelos quando chegam à superfície da Terra.

Nas ciências empíricas, para justificar φ, basta:

1. Apresentar bases para φ, justificadas por observações e experiências.

2. Utilizar essas bases para argumentar em favor da verdade de φ.

$\boxed{\text{observações e experiências}}$

$+$

$\boxed{\text{argumentações}}$

$\Downarrow$

$\boxed{\text{enunciado}}$

Justificativa de enunciados
nas ciências empíricas.

Matemática lida com entes abstratos:

números,
conjuntos,
figuras geométricas,
etc.

Em Matemática, a justificativa de enunciados não pode ser apoiada em observações e experiências.

Como justificar enunciados matemáticos?

Enunciados evidentes e não-evidentes

Enunciado matemático	$=$	evidente Não necessita justificativa	$\cup$	não-evidente Deve ser justificado

Evidência não é um critério

2 é um número par.

Toda função contínua é diferenciável.

Evidência não é um bom critério:

1. Imprecisa: difícil classificar como evidente ou não-evidente.
2. Relativa: evidente para uns, não-evidente para outros.
3. Enganosa: o que parece evidentemente verdadeiro (falso) pode ser falso (verdadeiro).

Paradoxo de Galileu

> **O conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados dos números naturais têm a mesma quantidade de elementos.**

Parece evidentemente falsa.
Contradiz a evidentemente verdadeira:

> **Dado um conjunto qualquer, ele possui mais elementos que cada uma de suas partes (próprias).**

Justificativa (Galileu Galilei, 1638):

Galileu Galilei (1564 –1642)

Uma bijeção entre dois conjuntos A e B associa os elementos de A e os elementos de B, de modo que cada elemento de A está associado a um único elemento de B e, reciprocamente, cada elemento de B está associado a um único elemento de A.

Exemplo com $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{1, 4, 9, 16\}$:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & 1 \\ 2 & \leftrightarrow & 4 \\ 3 & \leftrightarrow & 9 \\ 4 & \leftrightarrow & 16 \end{array}$$

Quando existe uma bijeção entre dois conjuntos, eles possuem a mesma quantidade de elementos.

Exemplo com A o conjunto dos números naturais e B o conjunto dos quadrados dos números naturais:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & 1 \\ 2 & \leftrightarrow & 4 \\ 3 & \leftrightarrow & 9 \\ 4 & \leftrightarrow & 16 \\ & \vdots & \\ n & \leftrightarrow & n^2 \\ & \vdots & \end{array}$$

Logo, o conjunto dos números naturais e o conjunto dos quadrados de números naturais têm a mesma quantidade de elementos.

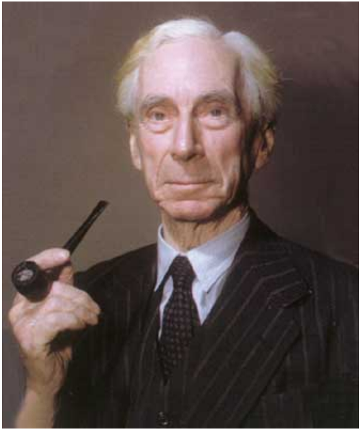
Paradoxo de Russell

Dada uma propriedade $P(x)$, referente a objetos x, existe o conjunto $A = \{x : P(x)\}$, formado por todos os objetos que satisfazem a $P(x)$.

Propriedade	Conjunto
x é ser humano	$H = \{x : x \text{ é ser humano}\}$
x é ser abstrato	$A = \{x : x \text{ é ser abstrato}\}$

Parece evidentemente verdadeiro. Mas é falso.

Justificativa (Bertrand Russell, 1903):



Bertrand Russell (1872–1970)

Um conjunto é normal se não possui a propriedade que o define. Por exemplo, H é normal.

Um conjunto é anormal se possui a propriedade que o define. Por exemplo, A é anormal.

Dado um conjunto definido por uma propriedade, ou ele é normal ou ele é anormal.

Um conjunto, definido por uma propriedade, é anormal se, e somente se, ele pertence a si mesmo.

Propriedade	X é conjunto normal
Conjunto	$N = \{X : X \text{ é conjunto normal}\}$

Temos que $H \in N$ e $A \notin N$.

Dado um conjunto qualquer C, temos que $C \in N$ ou $C \notin N$.

Para todo conjunto C, temos que $C \notin N$ se, e somente se $C \in C$.

Assim, $N \notin N$ se, e somente se, $N \in N$.

Justificativas em Matemática

Em resumo:

- Enunciados aparentemente falsos podem ser verdadeiros.
- Enunciados aparentemente verdadeiros podem ser falsos.
- Argumentações podem justificar a verdade de enunciados.

Justificativas em Matemática

Em Matemática, para justificar φ, basta argumentar em favor da verdade de φ.

$$\boxed{\text{argumentações}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{enunciado}}$$

Justificativa de enunciados em Matemática.

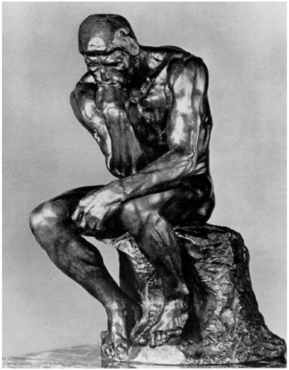
Paradoxo do altruísta

Princípio de Descartes: aquele que pensa, existe, independente da natureza de seus pensamentos.

Paradoxo do altruísta

Uma pessoa é *altruísta* se não pensa em si mesma.

Considere um indivíduo que pensa em uma pessoa se, e somente se, ela é altruísta.



Paradoxo do altruísta

Se o indivíduo é altruísta, então ele pensa em si mesmo. Logo, ele não é altruísta. Uma contradição.

Se o indivíduo não é altruísta, então ele pensa em si mesmo. Logo, ele é altruísta. Uma contradição.

Conclusão: um tal indivíduo, mesmo pensando, não pode existir, ou seja, Descartes está errado!

Axioma da escolha

Ernest Zermelo (1871–1953)

Auto-evidência não deve ser confundida com provabilidade.

Axioma da Escolha

Axioma da Escolha: Dada uma família de conjuntos não vazios, existe um conjunto formado por exatamente um elemento pertencente a cada um dos conjuntos da família.

$\forall$ família $F = \{A_i : i \in I\}$, de conjuntos não vazios, existe um conjunto E_F tal que, para cada $i \in I$:

$$E_F \cap A_i \text{ é um conjunto unitário.}$$

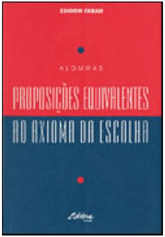
Dito assim, parece complicado.

Axioma da Escolha

Em conjunto com outros axiomas da Teoria dos Conjuntos, o Axioma da Escolha é equivalente a enunciados bastante simples:

Teorema (Farah, 1954)

O Axioma da Escolha é equivalente a distributividade da união generalizada sobre a interseção generalizada.



Então, ele é auto-evidente!!!

Paradoxo de Banach-Tarski

Em conjunto com outros axiomas da Teoria dos Conjuntos, o Axioma da Escolha acarreta enunciados paradoxais:

Teorema (Banach-Tarski, 1924)

Se consideramos o Axioma da Escolha, então dada uma esfera E de raio r e um número real $r' > r$, é possível particionar E em um número finito de pedaços que podem ser juntados novamente para formar uma esfera E' de raio r'.

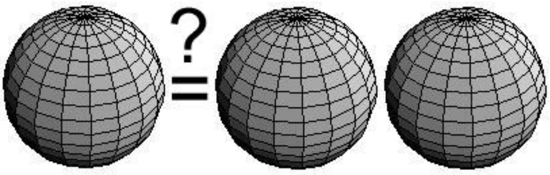
Então, ele não é auto-evidente!!!

Paradoxo de Banach-Tarski

Outra versão do Paradoxo de Banach-Tarski.

Teorema (Banach-Tarski, 1924)

Se consideramos o Axioma da Escolha, então dada uma esfera E de raio r, é possível particionar E em um número finito de pedaços que podem ser juntados novamente para formar duas esferas com o mesmo volume que a esfera dada.



Paradoxo de Banach-Tarski

O volume de E aumenta sem explicação.

O que é o volume de um corpo tri-dimensional?

Para todos os corpos $C, C', C_1, \ldots, C_n$ no $\mathbb{R}^3$:

1. If C' é obtido de C pela sua translação no $\mathbb{R}^3$, então $V(C') = V(C)$;
2. Se $V(C_1 \cup \ldots \cup C_n) \leq V(C_1) + \ldots + V(C_n)$;
3. Se $C_1, \ldots, C_n$ são disjuntos dois a dois, então $V(C_1 \cup \ldots \cup C_n) = V(C_1) + \ldots + V(C_n)$.

Paradoxo de Banach-Tarski

Particione E em $P_1, \ldots P_n$.

Mova $P_1, \ldots P_n$ no $\mathbb{R}^3$ e obtenha $P'_1, \ldots P'_n$.

Junte $P'_1, \ldots P'_n$ novamente e obtenha E'.

Então, temos:

$$\begin{array}{rcll} V(E) & = & V(P_1 \cup \ldots \cup P_n) & \\ & = & V(P_1) + \ldots + V(P_n) & (A3) \\ & = & V(P'_1) + \ldots + V(P'_n) & (A1) \\ & \geq & V(P'_1 \cup \ldots \cup VP'_n) & (A2) \\ & = & V(E'). & \end{array}$$

No melhor caso, o volume não diminui!!!

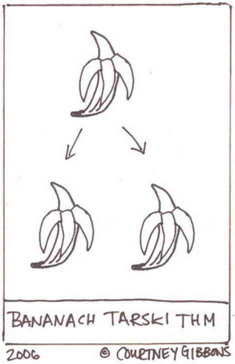
Paradoxo de Banach-Tarski

Stefan Banach (1892–1945) e Alfred Tarski (1902–1983)

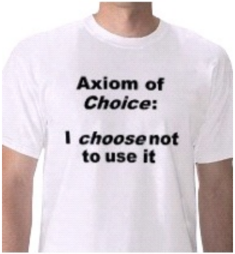
Quem disse que nós cortamos em pedaços que têm volume?

Paradoxo de Banach-Tarski

Paradoxo de Bananach-Tarski



Há escolha para Escolha?



A essência da Matemática está na sua liberdade. (Cantor)

Até amanhã!

http://www.uff.br/grupodelogica